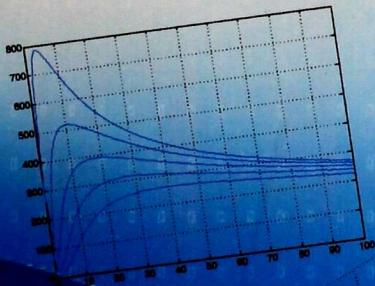


А.Ж. Жайнаков,
Г.Дж. Кабаева,
Г.Дж. Бейшекеева

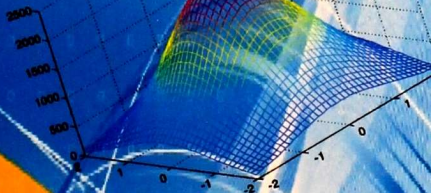
$$d^2 Q_{\tau} = -n_0 \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF dt$$

ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОБМЕНА

Учебное пособие



$$Q = - \int_0^{\tau} \int_F \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF dt$$



БИШКЕК 2016

УДК 681.3.06

ББК 31.31

Ш 21

Рекомендовано
ИГДиГТ КГТУ,

Ученым советом КГТУ
им. И. Раззакова

Рецензенты:

Проректор по науке Кыргызско-Российского
Славянского университета им.Б.Ельцина,
д-р.физ.-мат.наук, профессор

Лелевкин В.М.

Декан заочного факультета ИГДиГТ
им. У.Асаналиева, д-р.техн.наук, проф.

Татыбеков А.

Декан физического факультета КГНУ
канд.физ.-мат.наук., доц

Кадышев С.

Ш 21 Жайнаков А.Ж. и др.

Основы моделирования процессов теплообмена:

учебное пособие по дисциплине «Моделирование физических
процессов»

/авт.: А.Ж. Жайнаков, Г.Д. Кабаева, Г.Дж. Бейшекеева– Б; 2016-288с.

ISBN 978-9967-453-98-2

Рассмотрены основные понятия теории теплообмена, способы тепловой обработки материалов, основные сведения о плазменных и лазерных технологиях. Изложены численные методы решения прикладных задач. Описаны приемы разработки программ в MatLab. Приведены примеры использования вычислительной системы MatLab для решения задач численного моделирования. Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения и магистрантов высших учебных заведений по специальностям естественно- технического направления.

Ш 2203020000-16

ISBN 978-9967-453-98-2

УДК 681.3.06

ББК 31.31

© 2016

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	12
ГЛАВА 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА	14
1.1. Температурное поле, градиент температуры и плотность теплового потока.....	15
1.2. Коэффициент теплопроводности.....	20
1.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности.....	22
1.4. Условия однозначности для процессов теплопроводности.....	28
1.5. Примеры стационарного поля температур в телах различной формы.....	31
1.5.1. Теплопроводность плоской стенки.....	31
1.5.2. Теплопроводность в стержне постоянного сечения.....	34
1.5.3. Теплопроводность полуограниченной плоской однородной пластины.....	37
1.6. Конвективный теплообмен.....	41
1.6.1. Особенности переноса тепла в жидкостях.....	42
1.6.2. Гидродинамический и тепловой пограничные слои.....	44
1.6.3. Плотность теплового потока на поверхности теплообмена и уравнение теплоотдачи.....	45
1.6.4. Уравнение неразрывности.....	46
1.6.5. Закон сохранения энергии для движущейся среды.....	48
1.6.6. Закон сохранения количества движения вязкой жидкости.....	52
1.6.7. Критерии подобия конвективного теплообмена.....	55
1.6.8. Подobie и моделирование процессов конвективного теплообмена.....	58
1.6.9. Условия подобия физических процессов.....	61
1.7. Теплообмен излучением.....	69
1.7.1. Виды лучистых потоков.....	73
1.7.2. Законы теплового излучения.....	75
1.7.3. Излучение газов и паров.....	79
Контрольные вопросы к главе 1.....	83
ГЛАВА 2. КОНЦЕНТРИРОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ ЭНЕРГИИ И МОДЕЛИ ИХ РАСЧЕТА	84
2.1. Электрическая дуга.....	84
2.1.1. Расчетная модель плазматрона. Постановка задачи. Основные уравнения.....	87
2.1.2. Граничные условия.....	88
2.1.3. Модель плазматрона в приближении уравнений типа пограничного слоя с учетом магнитного поля электрической дуги...91	
2.1.4. Методика и результаты расчета.....	94
2.1.5. Расчет входных условий.....	96

2.1.6. Разностные уравнения.....	98
2.1.7. Последовательность решения уравнений.....	101
2.1.8. Результаты расчета.....	105
2.1.9. Экспериментальное исследование электрической дуги в плазматроне и сравнение с теоретическими результатами.....	111
2.2. Лазеры и лазерное излучение.....	118
2.2.1. Физические основы лазерного излучения.....	118
2.2.2. Принцип работы лазер.....	123
2.2.3. Свойства лазерного излучения.....	126
2.3. Схемы нагреваемого тела.....	149
Контрольные вопросы к главе 2.....	153
Контрольные задания к главе 2.....	153
ГЛАВА 3. ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ.....	155
3.1. Математические модели и численные методы.....	155
3.2. Математическая модель Этапы математического моделирования и вычислительный эксперимент.....	156
3.3. Приближенный анализ.....	158
3.4. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений.....	158
3.5. Метод Гаусса численного решения систем линейных алгебраических уравнений.....	159
3.6. Решение систем линейных уравнений методом простой итерации.....	167
3.7. Уравнение с одним неизвестным.....	168
3.8. Итерационные методы решения систем линейных алгебраически уравнений.....	174
3.9. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.....	175
3.10. Метод последовательных приближений.....	176
3.11. Метод Эйлера.....	178
3.12. Метод Рунге-Кутты.....	180
3.13. Численное интегрирование.....	182
3.14. Метод трапеции.....	183
3.15. Метод Симпсона (парабол).....	186
3.16. Разностные аналоги формул дифференцирования.....	188
Контрольные вопросы к главе 3.....	191
Контрольные задания к главе 3.....	192
Глава 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА В MATLAB.....	193
4.1. Математический пакет MATLAB.....	193
4.2. Решение задач теплопроводности методом конечных элементов с помощью инструмента PDE Toolbox.....	224
4.3. Программирование в MATLAB.....	241

4.4. Технология разработки графического интерфейса пользователя в системе MATLAB 7.....	245
4.4.1. Основные команды для создания GUI.....	245
4.4.2. Разработка интерфейса пользователя для решения задачи теплопроводности стержня.....	249
4.4.3. Технология разработки графического окна с элементами управления и объектами axes.....	254
4.4.4. Визуальное программирование интерфейса пользователя.....	263
Контрольные вопросы к главе 4.....	271
4.4.5. Визуальное программирование интерфейса пользователя.....	272
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	283



Посвящается юбилею

7 октября 2016 года исполняется 75 лет со дня рождения и 55 лет научно – педагогической и организаторской деятельности академика Национальной академии наук (НАН) Кыргызской Республики, заведующего лабораторией теоретической физики Института физико-технических проблем и материаловедения НАН КР, заведующего кафедрой информационных технологий и математического моделирования имени академика А. Жайнакова Института Горного дела и Горных технологий имени академика У.Асаналиева Кыргызского государственного технического университета имени И.Раззакова, народного учителя КР, заслуженного деятеля науки Кыргызской Республики, лауреата Государственной премии Кыргызской Республики в области науки и техники, Лауреата Академической премии имени И. К. Ахунбаева, доктора физико-математических наук, профессора

Жайнакова Аманбека Жайнаковича

А.Ж.Жайнаков родился в с. Кырк-Казык Таласского района Киргизской ССР. В 1963г. окончил с отличием физико-математический факультет Кыргызского государственного университета, в 1969г. - аспирантуру. С 1963-1976 год работал на кафедре теоретической физики Кыргызского государственного университета и прошел путь от преподавателя до заведующего кафедрой.

В 1970г. защитил кандидатскую диссертацию, в 1984г.- докторскую в г. Новосибирске в Институте теплофизики СО АН СССР. Совокупность полученных результатов дала начало новому

перспективному направлению - теоретическому исследованию открытой сильноточной электрической дуги на основе решения полной системы МГД - уравнений взаимодополняющими аналитическими, полуаналитическими и численными методами с привлечением экспериментальных данных.

А. Ж. Жайнаков – видный организатор науки. В 1976 г. под руководством А. Ж. Жайнакова был создан Республиканский межвузовский вычислительный центр, впоследствии переименованный в Институт информатики и информационных технологий, который стал основой компьютеризации системы образования и науки республики. Он был его бессменным руководителем до 2003г. Примечательно, что в институте впервые в республике в 1978-1980гг. были организованы курсы по обучению компьютерной грамотности учителей школ, преподавателей высших учебных заведений и других специалистов системы образования.

При институте был создан отдел численных методов решения прикладных задач. В этом отделе сотрудниками проводилась большая научно-исследовательская работа по изучению физических процессов, протекающих в электрической дуге, развивались методы численного анализа поведения и свойств электродуговой плазмы с помощью ЭВМ. Впоследствии многими сотрудниками этого отдела были защищены кандидатские и докторские диссертации.

В январе 2003 года назначен Президентом вновь созданной Кыргызской академии образования Министерства народного образования и науки КР.

В феврале 2003г. А.Ж.Жайнаков общим собранием Национальной академии наук КР был избран вице-президентом НАН КР, председателем Бюро Отделения физико-технических, математических и горно-геологических наук. С 2010г по 2015 был советником Президиума НАН КР по отделению физико-математических, технических и горно-геологических наук.

В настоящее время А. Ж. Жайнаков является заведующим лабораторией теоретической физики Института физико-технических проблем и материаловедения Национальной академии наук.

Академик А.Жайнаков – крупный ученый в области теоретической физики, механики, математического моделирования физических процессов и компьютерных технологий, является одним из основоположником нового научного направления в Кыргызстане – исследований в области теории тепло – и массообмена высокотемпературных электродуговых процессов на основе

численного моделирования и вычислительного эксперимента. Под его руководством впервые была построена модель расчета плазматрона на основе системы магнитогидродинамических уравнений в приближении пограничного слоя с учетом собственного магнитного поля электрической дуги; разработаны теоретические модели для анализа электрических дуг в канале и со свободной границей, основанные на численном решении полной системы магнитогазодинамических уравнений.

Научной школой академика А. Жайнакова разработаны теоретические модели для расчета характеристик электрических дуг с учетом состояния анодного узла, которые успешно используются в сварочных технологиях. Его исследования использованы в плазменных технологиях при создании новых конструкций плазмотронов и определении их оптимальных режимов работы не только в нашей стране, но и в таких известных научных центрах, как Институт электросварки им. Е.О.Патона (Украина), для оптимизации режимов сварки, разработанная им полуаналитическая двумерная модель электрической дуги использованы МВТУ им. Н.Э.Баумана (Москва) для разработки теории приэлектродных процессов учетом влияния на них столба дуги. В работах, выполненных под его руководством, развита трехмерная модель расчета характеристик неравновесных электродуговых потоков плазмы, выполнены численные исследования электрической дуги, горящей во внешнем поперечном магнитном поле.

Академик А.Ж.Жайнаков возглавляет научное направление по математическому моделированию и численным методам решения задач теплофизики, развитию теории энерго - и массообмена электродугового разряда. В настоящее время является руководителем проекта научно-исследовательских работ «Прикладная динамика электродуговой плазмы» Института физико-технических проблем и материаловедения. Использование новых компьютерных технологий в работах, выполняемых под его руководством, позволяет поднять уровень этих исследований и глубже понять многие закономерности физических процессов в электрической дуге. К настоящему времени им разработаны теоретические модели для расчета характеристик электрических дуг с учетом состояния анодного узла, в том числе с учетом взаимодействия столба электрической дуги с расплавленным металлом сварочной ванны. Результаты исследований с успехом применяются в сварочных технологиях. Разработана система компьютерного моделирования процессов теплообмена при

плазменной резке металлов для реализации вычислительного эксперимента и выполнения исследований.

Аманбек Жайнаков является автором более 350 научных работ, в том числе одиннадцати монографий, девяти учебников и учебных пособий.

Возглавляемая академиком А.Жайнаковым научная школа математического моделирования и численного эксперимента широко известна своими фундаментальными и прикладными исследованиями в ближнем и дальнем зарубежье.

В своей научной и научно-организационной деятельности академик А.Жайнаков поддерживает тесные связи с учеными России, Украины, Казахстана, Узбекистана, представляет науку Кыргызстана на многих авторитетнейших международных форумах – в Индии, Франции, Югославии, Италии, Германии, Сербии, Черногории, Южной Корее, Саудовской Аравии. Многие из его работ опубликованы за границей – в Италии, Германии, Югославии, Южной Корее, России, Казахстана, Японии, Англии и др.; является членом программного комитета периодической Международной конференции «Информационные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании».

Академик А.Жайнаков как талантливый педагог и ученый все эти годы ведет большую научно-организационную работу, занимается подготовкой кадров высшей квалификации. Им подготовлены 6 докторов и 15 кандидатов наук. Активно сочетает научно-организационную деятельность с педагогической – на протяжении 55 лет преподает в вузах республики.

С 1996 года заведует кафедрой информационных технологий и математического моделирования Института горного дела и горных технологий Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова. Кафедра осуществляет подготовку кадров по специальностям: «Автоматизированные системы обработки информации и управления»; «Информационные системы технологии»; «Программное обеспечение вычислительной техники».

А. Жайнаков является членом Президиума Высшей аттестационной комиссии КР; президентом Физического общества Кыргызстана; членом редколлегии Кыргызской национальной энциклопедии; председателем и научным консультантом Редакционного совета Кыргызской энциклопедии по физике и астрономии; членом Редакционно - издательского совета журнала «Наука и новые технологии» Государственного агентства по интеллектуальной

собственности КР, членом редакционных коллегий журналов «Вычислительные технологии» Института вычислительных технологий Сибирского отделения РАН, «Вестника Казахского национального университета им. Аль-Фараби», «Вестника кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова».

Академик А.Жайнаков занимается общественной деятельностью. Он является членом Президиума Центрального комитета профсоюза работников образования и науки КР. Указом Президента КР он утвержден членом Комитета по Государственным премиям КР в области науки и техники, а также членом Общественного наблюдательного совета при Министерстве образования и науки республики.

За огромный вклад в международное сотрудничество и развития научных связей, за активную работу в решении интеграционных проблем науки и образования он был избран: членом правления Всемирного математического общества тюркоязычных стран, Почетным академиком Национальной инженерной академии Республики Казахстан, академиком Международной академии информатизации, Почетный академик инженерной академии Кыргызстана, членом Всемирного инновационного фонда.

В 1992 году А.Жайнаков в составе творческого коллектива стал лауреатом Государственной премии КР в области науки и техники за разработку, исследование и применение двухструйного плазматрона в технологических процессах.

За заслуги в развитии отечественной науки и подготовке высококвалифицированных кадров, за научно-педагогическую деятельность академику А.Жайнакову присвоены Почетные звания «Народный учитель КР», «Заслуженный деятель науки Кыргызской Республики», он награжден Почетной грамотой Кыргызской Республики, Почетными грамотами Жогорку Кеңеша КР и Бишкекского городского кеңеша, знаками «Отличник в области высшего образования СССР» и «Отличник народного образования Киргизской ССР» удостоен медаль «За трудовую доблесть», Георгиевской медали «Честь, слава, труд» II степени Международной академии рейтинга «Золотая фортуна», юбилейной медалью «Манас-1000», победитель конкурса «Айкел Манас-Человек года» в номинации «Деятель науки 2004 года в Кыргызстане». Имя А.Жайнакова вошло в международный справочник «Выдающиеся личности XX века», изданный Кембриджским биографическим

центром (Великобритания), Юбилейной медалью “80 лет Казахскому национальному университету имени Аль-Фараби” за укрепление связи между вузами Казахстана и Кыргызстана, почетный профессор КГПУ им. Арабаева, почетный гражданин города Бишкек и Талас.

За выдающийся вклад в развитие науки и образования Кыргызской Республики академик А.Жайнаков был награжден орденом «Манаса III степени».

Он избран Почетным профессором Кыргызского национального университета им Ж. Баласагына, Восточно-Казахстанского государственного технического университета им.академика Д. Серикбаева, Почетным доктором Кыргызско-Российского Славянского университета им.Б.Ельцина, Почетный профессор Иссык - Кульского, Джалал - Абадского, Кыргызского горно-металлургического, Таласского университетов. Почетный гражданин Таласской области КР.

За существенный вклад в развитие науки и образования, внедрение в Кыргызстане электронно-вычислительных машин, организацию и руководство Республиканским межвузовским электронно - вычислительным центром, организацию и внесенный вклад в развитие кафедры в Институте горного дела и горных технологий имени академика У.Асаналиева Кыргызского Технического университета имени И.Раззакова и за особые заслуги в подготовке инженерных кадров кафедре “Информационных технологий и математического моделирования” присвоено имя академика НАН КР, Народного учителя, Заслуженного деятеля науки, лауреата Госпремии КР Аманбека Жайнакова.

Академик Аманбек Жайнакович – выдающийся ученый, организатор науки и образования, внесший большой вклад в развитие страны. Его отличают незаурядный ум, талант ученого, организатора, выдающиеся творческие способности, энергия, активная жизненная позиция, трудолюбие, честность, открытость, принципиальность, огромное чувство ответственности – эти прекрасные качества снискали ему заслуженное уважение, признательность и авторитет в стране.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие разработано на кафедре «Математического моделирования и информационных технологий» ИГД и ГТ им. У.А. Асаналиева, и продиктовано необходимостью обеспечения доступной для студентов учебной литературой по основным понятиям теории теплообмена, методам решения и основам моделирования процессов теплопереноса.

Изучение процессов тепломассообмена имеет большое значение для металлургической, строительной, энергетической, горнодобывающей и других отраслей промышленности. Эти процессы отличаются большим разнообразием и сложностью. Их исследования тесно связаны с развитием термодинамики, теплофизики, химической кинетики, молекулярной физики дисперсных систем. Поэтому изучение теоретического материала, относящейся к предметной области современной теории теплопередачи связано с пониманием достаточно сложных понятий, и приводит к необходимости применения при обучении новых методов и способов подачи материала, позволяющих использовать компьютерные технологии.

В наши дни большой научный и практический интерес представляют задачи для исследования тепловых процессов при обработке металлов концентрированными потоками энергии. К технологическим процессам, связанным с термообработкой относятся такие, как металлургические литейные процессы, тепловые способы сварки и резки металлов, процессы наплавки и поверхностной строжки. В каждом из случаев имеет место плавление металла,

течение расплавленного металла и влияние характера течения жидкого металла на конечный результат обработки. Задачи теплообмена в жидких металлах относятся к нестационарным нелинейным задачам теплопроводности, так как рассматриваются физические процессы в расплавленном состоянии металла.

В последние годы в связи с развитием вычислительной техники все более широкое распространение находят численные методы решения задач тепломассообмена. Из численных методов наиболее часто применяется разностный метод или метод сеток, который позволяет решать, как линейные, так и нелинейные дифференциальные уравнения. При решении полученных сеточных линейных и нелинейных уравнений используются приближенные методы, среди них известен метод итераций.

Учебник состоит из четырех глав, каждая глава содержит теоретический материал и практический, в конце глав и разделов приведены контрольные вопросы и задания для самостоятельной проверки и закрепления полученных знаний.

Учебное пособие рассчитано для студентов, которые освоили общий курс физики, высшей математики и имеют навыки составления простейших программ на языках программирования высокого уровня. Предназначено, в основном, для студентов инженерных специальностей ИГД и ГТ КГТУ, а также для аспирантов и преподавателей.

ГЛАВА 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА

Теплообмен, - это учение о самопроизвольных необратимых процессах распределения (переноса) теплоты в пространстве с неоднородным полем температуры. Согласно второму закону термодинамики самопроизвольный процесс передачи теплоты направлен в сторону уменьшения температуры. Таким образом, для возникновения теплового потока, т.е. процесса теплообмена между различными областями пространства, заполненного вещественной средой, необходимо и достаточно, чтобы в этих областях имели место неодинаковые температуры, т.е. разность температур. При этом тепловой поток направлен в сторону меньших температур [1-5].

Значимость процесса теплообмена определяется тем, что свойства тел самым существенным образом зависят от температуры, определяющей их тепловое состояние, которое в свою очередь зависит от условий теплообмена.

Сложный процесс переноса теплоты разбивают на ряд элементарных: *теплопроводность*, *конвекция* и *теплообмен излучением*. Такой прием упрощает его изучение. К тому же, каждый простой процесс переноса теплоты подчиняется своим законам. Перенос любой субстанции (массы, импульса, энергии, электрического заряда и т.д.) осуществляется какими-либо частицами материи, которые называют носителями этой субстанции.

Теплопроводность (кондукция) - способ передачи теплоты за счет взаимодействия микрочастиц тела (атомов, молекул, ионов в электролитах и электронов в металлах) обусловленный наличием градиента температуры. Теплопроводность имеет место в твердых, жидких и газообразных телах. В твердых телах теплопроводность является единственным способом передачи теплоты. В вакууме теплопроводность отсутствует.

Конвекция - способ передачи теплоты за счет перемещения вещества в пространстве из области с одной температурой в область с другой температурой. При этом вещество с более высокой температурой перемещается в область более низких температур, а холодный поток - в область с высокой температурой. Явление конвекции наблюдается в движущихся жидкостях или газах. В вакууме конвекция теплоты невозможна.

Тепловое излучение (радиационный теплообмен) - способ передачи теплоты за счет распространения электромагнитных волн в определенном диапазоне частот. *Теплообмен излучением* - это

процесс, который происходит следующим образом: внутренняя энергия вещества превращается в энергию излучения в виде электромагнитных волн, излучаемых телом или средой, далее происходит распространение излучения в пространстве (процесс переноса излучения), далее энергия поглощается веществом, которое оказалось на пути электромагнитных волн. Лучистая энергия может передаваться и в вакууме.

Таким образом, передача теплоты в твердых телах осуществляется *теплопроводностью*; в жидкостях теплота передается *конвекцией* и *теплопроводностью*; в газах – в основном *конвекцией* и *излучением*.

Простые виды теплообмена в чистом виде встречаются редко, в действительных процессах обычно сопутствуют друг другу, и часто связаны с переносом массы (диффузией), т.е. имеет место сложный тепло- и массообмен.

Теплообмен между жидкостью или газом и поверхностью твердого тела называют *конвективным теплообменом* или *теплоотдачей*.

Теплообмен, обусловленный совместным переносом теплоты излучением, теплопроводностью и конвекцией, называется *радиационно-конвективным теплообменом*. Если теплота передается теплопроводностью и излучением, то такой вид теплообмена называется *радиационно - кондуктивным*.

Процесс теплообмена между различными жидкостями, разделенными твердой стенкой называют *теплопередачей* [1-4].

1.1. Температурное поле, градиент температуры и плотность теплового потока

Температурным полем тела (или системы тел) называется совокупность значений температуры, взятая по его объему в любой рассматриваемый момент времени. Математически поле температур может быть выражено в следующей форме:

$$T=f(x, y, z, t). \quad (1.1)$$

Температуру измеряют в градусах Цельсия и Кельвинах, где x, y, z - координаты точки в пространстве в метрах, в которой находят температуру; t – время процесса теплообмена в секундах.

Температурное поле, которое изменяется во времени, называется *неустановившимся* или *нестационарным*. Температурное

поле, которое не изменяется во времени, называется *установившимся* или *стационарным*.

В зависимости от числа координат, вдоль которых может изменяться температура тела, различают *трехмерное*, *двухмерное*, *одномерное* и *однородное* температурные поля. Если температурное поле является *нестационарным*:

- *трехмерное нестационарное температурное поле* записывается в виде (1.1);
- *двухмерное (плоское) нестационарное температурное поле*:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad T = f(x, y, t);$$

- *одномерное нестационарное температурное поле*: $T = f(x, t)$;

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0;$$

- *однородное нестационарное температурное поле*: $T = f(t)$.

Если температурное поле является *стационарным*, то температура не изменяется во времени, а является только функцией координат и запишется:

- в случае *трехмерного стационарного температурного поля*:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad T = f(x, y, z);$$

- в случае *двухмерного стационарного температурного поля*:

$$T = f(x, y), \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0;$$

- в случае *одномерного стационарного температурного поля*:

$$T = f(x), \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Поверхность (геометрическое место) равных температур называется *изотермической* (рис. 1.1). Температура в теле изменяется только в направлениях пересекающих изотермические поверхности. И наибольший перепад температуры на единицу длины имеет место в направлении нормали к изотермической поверхности. Вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и численно равен производной от

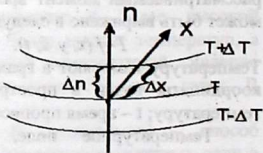


Рис. 1.1. Изотермы.

температуры по этому направлению называется градиентом температуры:

$$\text{grad } T = n_0 \frac{\partial T}{\partial n} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta n} \quad (1.2)$$

где n_0 — единичный вектор нормали, направленный в сторону возрастания температур; n — нормаль к изотермической поверхности. Проекция вектора $\text{grad } T$ на координатные оси ox , oy , oz будут равны:

$$(\text{grad } T)_x = \frac{\partial T}{\partial n} \cos(n, \hat{x}) = \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$(\text{grad } T)_y = \frac{\partial T}{\partial n} \cos(n, \hat{y}) = \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$(\text{grad } T)_z = \frac{\partial T}{\partial n} \cos(n, \hat{z}) = \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Принято считать $\text{grad } T$ положительным, если он направлен в сторону возрастания температур (рис.1.2). Градиент температуры определяет тепловой поток. Если градиент температуры не равен нулю, то возникает тепловой поток от более нагретых участков к менее нагретым участкам. Тепловым потоком \bar{Q} называется количество теплоты Q_τ , переносимое через какую-либо изотермическую поверхность в единицу времени dt :

$$\bar{Q} = n_0 \frac{dQ_\tau}{d\tau}, \text{ Дж/с} = \text{Вт}. \quad (1.3)$$

Количество теплоты Q_τ — количество тепловой энергии, полученное или отданное телом (твердым, жидким или газообразным) за некоторое время τ в результате теплообмена, измеряют в джоулях [Дж] или калориях [кал].

Тепловой поток, отнесенный к единице площади изотермической поверхности, называется плотностью теплового потока:

$$\bar{q} = n_0 \frac{d^2 Q_\tau}{d\tau dF} = \frac{d\bar{Q}}{dF}, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \quad (1.4)$$

Здесь, F — площадь поверхности теплообмена, м^2 . Вектор плотности теплового потока \bar{q} направлен по нормали к изотермической поверхности, его положительное направление совпадает с направлением убывания температуры, т.к. тепло всегда передается от более горячих частей тела к холодным.

В расчетах используют три вида удельных тепловых потоков:

а) *поверхностную плотность теплового потока* (обозначают: \bar{q} , Вт/м^2) — тепловой поток, отнесенный к площади поверхности тела;

- б) линейную плотность теплового потока (обозначают: q_l , Вт/м) – тепловой поток, отнесенный к длине тела;
 в) объемную плотность теплового потока (обозначают: q_v , Вт/м³) – тепловой поток, отнесенный к объему тела.

Закон Фурье¹. При изучении процесса теплопроводности в твердых телах французским ученым Фурье было экспериментально установлено, что количество переданной теплоты, пропорционально падению температуры, времени и площади сечения, перпендикулярного направлению распространения теплоты:

$$d^2 Q_r = -n_0 \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF dt, \text{ Дж.} \quad (1.5)$$

Используя (1.2) и (1.3), выражение (1.5) можно записать для теплового потока:

$$\bar{Q} = -\lambda \text{grad} T \text{ F, Вт.} \quad (1.6)$$

Плотность теплового потока (1.4) примет вид:

$$\bar{q} = -\lambda \text{grad} T, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \quad (1.7)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, является физическим параметром вещества, характеризующим способность вещества проводить теплоту, Вт/(м·К).

Поэтому уравнения (1.6) и (1.7) являются математической записью основного закона теплопроводности, который формулируется следующим образом: *плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры.*

Таким образом, векторы \bar{q} и $\text{grad} T$ лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны. Это и объясняет наличие

знака минус в правых частях уравнений (1.6) и (1.7). Градиент температурного поля направлен по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры, тепловой поток – в сторону убывания температуры. Линии, касательные к которым совпадают с направлением вектора \bar{q} , называются линиями теплового потока. Линии теплового потока

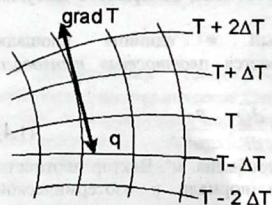


Рис. 1.2. Изотермы и линии теплового потока.

¹ Ж.Б. Фурье (1768-1830 гг.) – французский математик, внесший большой вклад в теорию теплопроводности.

ортогональны к изотермическим поверхностям (рис.1.2).

Рассмотрим случай определения количества тепла проходящего через элементарную площадку dF_ϵ , расположенную под углом φ к плоскости, касательной к изотермической поверхности (рис.1.3).

Скалярная величина вектора плотности теплового потока будет равна:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \quad \text{Вт/м}^2.$$

Если градиент температуры для различных точек изотермической поверхности различный, то количество тепла, которое пройдет через всю изотермическую поверхность в единицу времени, найдется как

$$Q = \int_F q dF = - \int_F \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF, \quad \text{Вт}$$

где dF – элемент изотермической поверхности.

Полное количество тепла, прошедшее за время τ через изотермическую поверхность F равно:

$$Q = - \int_0^\tau \int_F \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF d\tau, \quad \text{Дж.} \quad (1.8)$$

Количество тепла, проходящее через элементарную площадку dF_ϵ , расположенную под углом φ к плоскости, касательной к изотермической поверхности (рис. 1.3) определится таким же образом, если учесть, что

$$q_\epsilon = q \cos \varphi = \frac{dQ}{d\tau} \frac{1}{dF} \cos \varphi = \frac{dQ}{d\tau} \frac{1}{dF_\epsilon}. \quad (1.9)$$

Так как $dF = dF_\epsilon \cos \varphi$ является проекцией площадки dF_ϵ на изотермическую поверхность, то количество тепла, протекающее через элементарную площадку dF_ϵ за время $d\tau$, запишется:

$$dQ_\epsilon = q_\epsilon dF_\epsilon d\tau = q dF_\epsilon \cos \varphi d\tau = q dF d\tau. \quad (1.10)$$

Общее количество тепла, протекающее за время τ через поверхность F_ϵ равно:

$$Q = - \int_0^\tau \int_{F_\epsilon} \lambda \frac{\partial T}{\partial l} dF_\epsilon d\tau, \quad \text{Дж.} \quad (1.11)$$

Из уравнения (1.9) следует, что самым большим удельным потоком тепла будет тот, который рассчитан вдоль нормали к изотермическим поверхностям. Проектируя плотность теплового потока на координатные оси ox , oy , oz , получим:

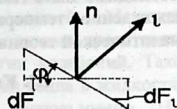


Рис.1.3. Элементарная площадка

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (1.12)$$

Тепловые потоки, выраженные уравнением (1.12), являются составляющими вектора удельного теплового потока

$$q = iq_x + jq_y + kq_z. \quad (1.13)$$

Таким образом, чтобы определить количества тепла, проходящего через какую-либо поверхность твердого тела, необходимо знать температурное поле внутри рассматриваемого тела. Нахождение температурного поля и является главной задачей аналитической теории теплопроводности.

1.2. Коэффициент теплопроводности

Коэффициент теплопроводности определяется из соотношения [1-6]

$$\lambda = \frac{|q|}{|\text{grad}T|}, \text{ Вт/мград}. \quad (1.14)$$

Из уравнения (1.14) следует, что коэффициент теплопроводности численно равен количеству тепла, которое проходит в единицу времени через единицу изотермической поверхности при температурном градиенте, равном единице.

Так как тела могут иметь различную температуру, а при наличии теплообмена и в самом теле температура будет распределена неравномерно, то в первую очередь важно знать зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Опыты показывают, что для многих материалов с достаточной для практики точностью зависимость коэффициентов теплопроводности от температуры можно принять линейной:

$$\lambda = \lambda_0 [1 + b(T - T_0)]. \quad (1.15)$$

где λ_0 - значение коэффициента теплопроводности при температуре T_0 ; b - постоянная, определяемая опытным путем.

Коэффициент теплопроводности газов. Согласно кинетической теории вещества перенос тепла теплопроводностью в газах при обычных давлениях и температурах определяется переносом кинетической энергии молекулярного движения в результате хаотического движения и столкновения отдельных молекул газа. При этом коэффициент теплопроводности определяется соотношением

$$\lambda = 1/3 \omega \ell c_v \rho, \quad (1.16)$$

ω - средняя скорость перемещения молекул газа;

ℓ - средняя длина свободного пробега молекул газа между их соударениями;

c_v - теплоемкость газа при постоянном объеме;

ρ - плотность газа,

Коэффициент теплопроводности для газов с повышением температуры возрастает. Коэффициент теплопроводности газов лежит в пределах значений от $\lambda = 0,006$ до $\lambda = 0,6$ Вт/м²град.

Коэффициент теплопроводности жидкостей. Механизм распространения тепла в капельных жидкостях можно представить, как перенос энергии путем нестройных упругих колебаний. Такое физическое представление о механизме передачи тепла в жидкостях, предложенное А.С.Предводителевым было использовано Н.Б. Варгафтиком для описания опытных данных по теплопроводности различных жидкостей. Для большинства жидкостей теория нашла хорошее подтверждение. На основании этой теории была получена формула для коэффициента теплопроводности следующего вида:

$$\lambda = A \frac{c_p \rho^{4/3}}{\mu^{1/3}}. \quad (1.17)$$

где c_p - теплоемкость при постоянном давлении;

ρ - объемная плотность жидкости;

μ - молекулярный вес.

Коэффициент А, пропорциональный скорости распространения упругих волн в жидкости, не зависит от природы жидкости, но зависит от температуры.

Опыты показали, что для большинства жидкостей с повышением температуры коэффициент теплопроводности λ убывает, исключение составляют вода и глицерин. Коэффициент теплопроводности капельных жидкостей лежит примерно в пределах от $\lambda = 0,07$ до $\lambda = 0,7$ Вт/м²град.

При повышении давления коэффициенты теплопроводности жидкостей возрастают.

Коэффициент теплопроводности твердых тел. Металлы и сплавы. В металлах основным передатчиком тепла являются свободные электроны, которые можно уподобить идеальному одноатомному газу. Передача тепла при помощи колебательных движений атомов или в виде упругих звуковых волн не исключается, но ее доля незначительна по сравнению с переносом энергии электронным газом. Вследствие движения свободных электронов происходит выравнивание температуры во всех точках

нагревающегося или охлаждающегося металла. Свободные электроны движутся как из областей, более нагретых в области менее нагретые, так и в обратном направлении. В первом случае они отдают энергию атомам, во втором отбирают. Так как в металлах носителем тепловой и электрической энергии являются электроны, то коэффициенты теплопроводности и электропроводности пропорциональны друг другу. При повышении температуры вследствие усиления тепловых неоднородностей рассеивание электронов усиливается. Это влечет за собой уменьшение коэффициентов тепло и электропроводности чистых металлов.

При наличии разного рода примесей коэффициент теплопроводности металлов резко убывает. Последнее объясняется увеличением структурных неоднородностей, которые приводят к рассеиванию электронов. Так, например, для чистой меди $\lambda=396$ Вт/м²град, для той же меди с примесью $\lambda=142$ Вт/м²град. С увеличением температуры теплопроводность практически всех чистых металлов уменьшается. В отличие от чистых металлов коэффициенты теплопроводности сплавов при повышении температуры увеличиваются [4-6].

Твердые тела диэлектрики (нематаллы). В диэлектриках с повышением температуры коэффициент теплопроводности обычно увеличивается. Как правило, для материалов с большей объемной плотностью коэффициент теплопроводности имеет высокое значение. Он зависит также от структуры материала, его пористости и влажности.

Многие строительные и теплоизоляционные материалы имеют пористое строение (кирпич, бетон, асбест, шлак и др.), и применение закона Фурье к таким телам является в известной мере условным. Наличие пор в материале не позволяет рассматривать такие тела, как сплошную среду.

Условной является также величина коэффициента теплопроводности пористого материала. Коэффициенты теплопроводности строительных и теплоизоляционных материалов имеют значения. Лежащие примерно в пределах от 0,023 до 2, 9 Вт/м²град.

1.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности

При изучении какого-либо физического явления необходимо установить зависимость между величинами, характеризующими это явление. В случае сложных физических процессов, определяющие

величины могут значительно изменяться в пространстве и времени, и установить зависимость между этими величинами очень трудно. В этих случаях используют метод математической физики, который исходит из того, что ограничивается промежуток времени и из всего пространства рассматривается лишь элементарный объем. Это позволяет в пределах элементарного объема и выбранного малого отрезка пренебречь изменением некоторых величин, характеризующих процесс, существенно упростить анализ [1-8].

Выбранные таким образом элементарный объем dv и элементарный промежуток времени $d\tau$, в пределах которых рассматривается изучаемый процесс, с математической точки зрения являются величинами бесконечно малыми, а с физической точки зрения – величинами еще достаточно большими. Чтобы в их пределах можно было игнорировать дискретное строение среды и рассматривать ее как континуум (сплошную). Полученная таким образом зависимость является общим дифференциальным уравнением рассматриваемого процесса. Интегрируя дифференциальные, можно получить аналитическую зависимость между величинами для всей области интегрирования и всего рассматриваемого промежутка времени.

При решении задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо иметь дифференциальное уравнение теплопроводности. В основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности положен первый закон термодинамики для тел, процесс взаимодействия которых с окружающей средой происходит без совершения какой-либо внешней работы. Закон сохранения энергии в рассматриваемом случае может быть сформулирован следующим образом: количество теплоты

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ, \text{ Дж}, \quad (1.18)$$

где dQ_1 - количество тепла, введенное в элементарный объем путем теплопроводности за время $d\tau$; dQ_2 – количество тепла, которое за время $d\tau$ выделилось в элементарном объеме dv за счет внутренних источников; dQ – изменение внутренней энергии вещества, содержащегося в элементарном объеме dv за время $d\tau$.

Для облегчения вывода дифференциального уравнения принимают следующие допущения:

- 1) Тело однородно и изотропно;
- 2) Физические параметры постоянны;
- 3) Деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, очень мала по сравнению с самим объемом;

4) Внутренние источники теплоты в теле, которые в общем случае могут быть заданы как $q_v = f(x, y, z, \tau)$, распределены равномерно.

Для нахождения составляющих уравнения (1.18) выделим в теле элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz (рис. 1.4). Параллелепипед должен быть расположен так, чтобы его грани были параллельны соответствующим координатным плоскостям. Количество теплоты, которое подводится к граням элементарного объема за время $d\tau$ в направлении осей O_x, O_y, O_z , обозначим соответственно dQ_x, dQ_y, dQ_z .

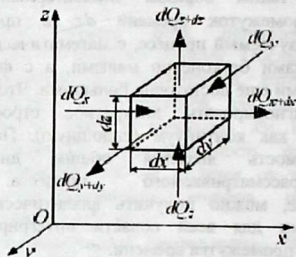


Рис. 1.4. Количество теплоты, которое подводится к граням и отводится через грани элементарного объема.

Количество теплоты, которое будет отводиться через противоположные грани в тех же направлениях, обозначим соответственно $dQ_{x+dx}, dQ_{y+dy}, dQ_{z+dz}$. Количество теплоты, подведенное к грани $dydz$ в направлении оси Ox за время $d\tau$ составляет $dQ_x = q_x dydzd\tau$, где q_x – проекция плотности теплового потока на направление нормали к указанной грани. Количество теплоты, отведенное через противоположную грань элементарного параллелепипеда в направлении оси Ox , запишется как $dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dydzd\tau$.

Разница между количеством теплоты, подведенного к элементарному параллелепипеду, и количеством теплоты отведенного от него за время $d\tau$ в направлении оси Ox , представляет собой количество теплоты:

$$dQ_x = dQ_x - dQ_{x+dx} = q_x dydzd\tau - q_{x+dx} dydzd\tau \quad (1.19)$$

Раскладывая в ряд Тейлора функцию q_{x+dx} , т.к. она является непрерывной на интервале dx

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots \quad (1.19^*)$$

Если ограничиться двумя первыми членами ряда, то уравнение (1.19) запишется в виде:

$$dQ_{x1} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz d\tau$$

Таким же образом находится количество теплоты, подводимое к элементарному объему и в направлениях двух других координатных осей Oy и Oz :

$$dQ_{y1} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy dz d\tau$$

$$dQ_{z1} = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dx dy dz d\tau$$

Количество теплоты dQ , подведенное в результате теплопроводности к рассматриваемому объему, будет равно:

$$dQ_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dy dz d\tau$$

Далее, определяется вторая слагаемая уравнения (1.18). dQ_2 — количество тепла, которое за время dt выделилось в элементарном объеме dv за счет внутренних источников. Обозначим количество теплоты, выделяемое внутренними источниками в единицу объема среды в единицу времени и называемое мощностью внутренних источников теплоты, через q_v [Вт/м³], тогда:

$$dQ_2 = q_v dv d\tau$$

Третья составляющая dQ в уравнении (1.18) найдется в зависимости от характера термодинамического процесса изменения системы. При рассмотрении, например изохорного процесса вся теплота, подведенная к элементарному объему, уйдет на изменения внутренней энергии вещества, заключенного в этом объеме, т. е. $dQ = dU$. Если рассматривать внутреннюю энергию единицы объема $u = u(t, v)$, тогда dU найдется как

$$dU = C_v \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau v = c_v \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau v,$$

где C_v — изохорная теплоемкость, Дж/(м³·К); c_v — удельная изохорная теплоемкость, Дж/(кг·К); ρ — плотность вещества. Подставляя полученные выражения и в уравнение (1.8), получаем:

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_v \quad (1.20)$$

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \bar{q} + q_v. \quad (1.21)$$

Выражения (1.20) и (1.21) являются дифференциальными уравнениями энергии для изохорного процесса переноса теплоты.

Выражение (1.20), используя (1.12) можно записать в виде

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v \quad (1.22)$$

Выражение (1.22) называется дифференциальным уравнением теплопроводности для изохорного процесса.

При рассмотрении изобарного процесса вся теплота, подведенная к объему, уйдет на изменение энтальпии вещества H , заключенного в этом объеме, и уравнение (1.8) запишется следующим образом:

$$dQ_1 + dQ_2 = dH. \quad (1.23)$$

Если рассматривать энтальпию единицы объема как $h = h(t, P)$, то можно показать, что

$$dH = C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} d\pi t v = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} d\pi t v = \rho \frac{\partial h}{\partial \tau} d\pi t v, \quad (1.24)$$

где C_p – изобарная теплоемкость единицы объема, Дж/(м³·К); c_p – удельная изобарная теплоемкость (единицы массы), Дж/(кг·К).

Подставляя в (1.23) значения составляющих можно получить

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v \quad (1.25)$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \bar{q} + q_v \quad (1.26)$$

Выражения (1.25) и (1.26) являются дифференциальными уравнениями энергии для изобарного процесса переноса теплоты.

Выражение (1.25) можно записать в виде

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v \quad (1.27)$$

В твердых телах перенос теплоты осуществляется по закону Фурье, значения c_p и c_v мало различаются и можно принять их равными и равными c . Тогда, уравнение (1.27) можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{c\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c\rho} \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{c\rho} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \frac{q_v}{c\rho} \quad (1.28')$$

Выражение (1.28) и его запись в виде (1.28') представляет собой дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье-Кирхгофа, которое устанавливает связь между временным и пространственным изменениями температуры в любой точке тела, в котором происходит процесс теплопроводности [1-6].

Если принять теплофизические характеристики постоянными, то (1.28) принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_v \rho}, \quad (1.29)$$

где $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$ [м²/с] - коэффициент пропорциональности называется коэффициентом температуропроводности и является физическим параметром вещества, который характеризует способность вещества выравнивать температуру. Вещества, имеющие высокую температуропроводность, нагреваются и охлаждаются быстрее тел, имеющих меньшее значение этого параметра. Если коэффициент теплопроводности характеризует способность тел проводить тепло, то коэффициент температуропроводности является мерой теплоинерционных свойств тела. Жидкости и газы обладают большой тепловой инерционностью т.к. характеризуются малым коэффициентом температуропроводности. Металлы обладают малой тепловой инерционностью, так как они имеют большой коэффициент температуропроводности.

Уравнение (1.29), используя оператор Лапласа

$$\Delta_{x,y,z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{q_v}{c \rho}, \quad (1.30)$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности при стационарном режиме, когда $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, приобретает вид [1-6]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v = 0. \quad (1.31)$$

Если внутренние источники тепла отсутствуют $q_v = 0$, то уравнение упрощается и примет вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (1.32)$$

Для решения конкретной задачи к уравнению следует добавить соответствующие граничные условия.

1.4. Условия однозначности для процессов теплопроводности

Так как дифференциальное уравнение теплопроводности выведено на основе общих законов физики, то оно описывает явление теплопроводности в самом общем виде, можно сказать целый класс явлений теплопроводности. Чтобы из бесчисленного количества выделить конкретно рассматриваемый процесс и дать его полное математическое описание к дифференциальному уравнению необходимо присоединить математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса. Эти частные особенности, которые совместно с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности, называются *условиями однозначности* или *краевыми условиями*.

Условия однозначности включают [1-5]:

- *геометрические размеры* определяют форму и размеры тела, в котором протекает процесс;
- *физические условия*, характеризующие физические свойства тела;
- *временные или начальные условия*, характеризующие распределение температур в изучаемом теле в начальный момент времени;
- *граничные условия*, характеризующие взаимодействие тела с окружающей средой;

Геометрическими условиями задаются форма и линейные размеры тела, в котором протекает процесс;

Физическими условиями задаются физические параметры тела λ , ρ , C и др. И может быть задан закон распределения внутренних источников тепла.

Начальные условия необходимы при рассмотрении нестационарных процессов и состоит в задании закона распределения температуры внутри тела в начальный момент времени. В общем случае начальное условие аналитически может быть записано следующим образом:

$$\text{при } \tau = 0: \quad T = f(x, y, z). \quad (1.33)$$

В случае равномерного распределения температуры в теле начальное условие упрощается:

$$\text{при } \tau = 0: \quad T = T_0 = \text{const}. \quad (1.34)$$

Граничные условия могут быть заданы несколькими способами.

а) *Граничные условия первого рода.* При этом задается распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени:

$$T_c = f(x, y, z, t), \quad (1.35)$$

где T_c – температура на поверхности тела; x, y, z – координаты поверхности тела. В частном случае, когда температура на поверхности является постоянной на протяжении всего времени протекания процессов теплообмена, уравнение упрощается и принимает вид:

$$T_c = \text{const.}$$

б) *Граничные условия второго рода.* При этом задаются величины плотности теплового потока для каждой точки поверхности тела и любого момента времени:

$$q_n = f(x, y, z, t). \quad (1.36)$$

В простейшем случае плотность теплового потока по поверхности и во времени остается постоянной:

$$q_n = q_0 = \text{const.} \quad (1.37)$$

Такой случай теплообмена имеет место, например, при нагревании различных металлических изделий в высокотемпературных печах.

в) *Граничные условия третьего рода.* При этом задаются температура окружающей среды T_{∞} и закон теплообмена этой среды с поверхностью тела. Граничное условие третьего рода характеризует закон теплообмена между поверхностью и окружающей средой в процессе охлаждения и нагревания тела. Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой используется закон Ньютона – Римана.

Процесс теплообмена между поверхностью тела и средой относится к очень сложным процессам и зависит от большого количества параметров.

Согласно закону Ньютона – Римана количество тепла, отдаваемое единицей поверхности в единицу времени, пропорционально разности температур между поверхностью тела T_c и окружающей среды T_{∞} ($T_c > T_{\infty}$)

$$q = \alpha(T_c - T_{\infty}), \quad (1.38)$$

где α – коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом теплоотдачи*, имеет размерность $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

Коэффициент теплоотдачи характеризует интенсивность теплообмена отдаваемого (или воспринимаемого) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой. Численно он равен

количеству тепла, отдаваемого (или воспринимаемого) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой, равной одному градусу.

Согласно закону сохранения энергии количество тепла, которое отводится с единицы поверхности в единицу времени вследствие теплоотдачи (1.38), должно равняться теплу, подводимому к единице поверхности в единицу времени вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, т.е.

$$\alpha(T_c - T_{\infty}) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_c, \quad (1.39)$$

где n – нормаль к поверхности тела, индекс c указывает на то, что температура и градиент относятся к поверхности тела (при $n=0$).

Окончательно граничное условие третьего рода может быть записано в таком виде:

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_c = -\frac{\alpha}{\lambda}(T_c - T_{\infty}). \quad (1.40)$$

Уравнение (1.40) по существу является частным выражением закона сохранения энергии для поверхности тела. Коэффициент теплоотдачи зависит от большого числа факторов. Однако во многих случаях коэффициент теплоотдачи можно считать неизменным при решении задач.

г) *Граничные условия четвертого рода* характеризуют условия теплообмена системы тел или тела с окружающей средой по закону теплопроводности. Предполагается, что между телами осуществляется идеальный контакт (температуры соприкасающихся поверхностей одинаковы).

В рассматриваемых условиях имеет место равенство тепловых потоков, проходящих через поверхность соприкосновения, т.е.

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_c = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_c. \quad (1.41)$$

При идеальном тепловом контакте оба тела на поверхности сопряжения имеют одинаковую температуру [1-7].

Дифференциальное уравнение теплопроводности совместно с условиями однозначности описывают полную математическую постановку конкретной задачи теплопроводности. Поставленная таким образом задача решается аналитическим, численным или экспериментальным методом.

В случае применения экспериментального метода для решения задач теплопроводности используются методы физического моделирования или тепловых аналогий [3-7].

1.5. Примеры стационарного поля температур в телах различной формы

1.5.1. Теплопроводность плоской стенки

Плоская стенка представляет собой тело, ограниченное с двух сторон параллельными поверхностями, протяженность которых в направлении y и z велика. Если боковые поверхности неограниченной плоской стенки изотермические, то изменением температуры в ней по оси y и z можно пренебречь $\left(\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0\right)$ и дифференциальное уравнение теплопроводности (1.31) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.42)$$

Рассмотрим однородную и изотропную стенку толщиной δ с постоянным коэффициентом теплопроводности. На наружных поверхностях стенки поддерживаются постоянными температуры T_{c1} и T_{c2} (рис. 1.5).

При заданных условиях температура будет изменяться только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки. Ось x направлена по толщине стенки, температура в направлении oy и oz остается постоянной и уравнение теплопроводности запишется:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (1.43)$$

Запишем граничные условия первого рода:

$$\left. \begin{array}{l} \text{При } x=0 \quad T=T_{c1} \\ \text{При } x=\delta \quad T=T_{c2} \end{array} \right\} \quad (1.44)$$

Таким образом, (1.43) и (1.44) представляют собой полную математическую формулировку рассматриваемой задачи. Решая поставленную задачу, найдем распределение температуры в плоской стенке, т.е. функцию $T=f(x)$, и получим формулу для определения количества тепла, проходящего в единицу времени через стенку.

Закон распределения температур по толщине стенки находится двойным интегрированием уравнения (1.43). Первое интегрирование дает:

$$dT = C_1 dx.$$

Второе интегрирование дает общее решение уравнения (1.43)

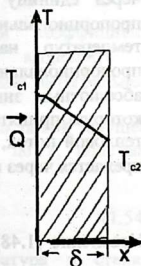


Рис. 1.5. Распределение температуры по толщине плоской стенки.

$$T = C_1 x + C_2, \quad (1.45)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, которые определяют, используя граничные условия.

Полагая в (1.45) $x=0$ и используя (1.44), получим $C_2 = T_{c1}$, а при $x=\delta$ имеем из этих же условий

$$T = C_1 \delta + C_2 = C_1 \delta + T_{c1}, \quad (1.46)$$

откуда $C_1 = -\frac{T_{c1} - T_{c2}}{\delta}$.

Подставляя значения постоянных C_1 и C_2 в уравнение (1.45), получаем закон распределения температуры в рассматриваемой плоской стенке:

$$T = T_{c1} - \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\delta} x. \quad (1.47)$$

Из уравнения (1.47) видно, что $T(x)$ линейно зависит от x . Эта зависимость $T(x)=f(x)$ по толщине стенки имеет вид, представленный на рис. 1.5.

Плотность теплового потока q может быть определена из закона Фурье, согласно которому: $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$.

Учитывая, что $\frac{\partial T}{\partial x} = C_1 = -\frac{T_{c1} - T_{c2}}{\delta}$ и подставляя в выражение

закона Фурье получим: $q = \frac{\lambda}{\delta} (T_{c1} - T_{c2}), \text{ Вт/м}^2. \quad (1.48)$

Из уравнения (1.48) следует, что количество тепла, проходящее через единицу поверхности стенки в единицу времени, прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности λ и разности температур на наружных поверхностях стенки и обратно пропорционально толщине стенки δ . Тепловой поток определяется не абсолютным значением температур, а их разностью $T_{c1} - T_{c2} = \Delta T$, которую принято называть температурным напором. Зная удельный тепловой поток, можно вычислить общее количество тепла, которое передается через поверхность стенки величиной F за время τ

$$Q = qF\tau = \frac{\lambda}{\delta} (T_{c1} - T_{c2}) F \tau, \quad \text{Дж.} \quad (1.49)$$

Уравнение (1.48), записывая в виде $\frac{(T_{c1} - T_{c2})}{\delta} = \frac{q}{\lambda}$ и подставляя это выражение в уравнение температурного поля (1.47), можно получить:

$$T = T_{c1} - \frac{q}{\lambda} x. \quad (1.50)$$

Из уравнения (1.50) следует, что прочих равных условиях температура в стенке убывает тем быстрее, чем больше плотность теплового потока.

Рассмотрим случай, когда коэффициент теплопроводности является функцией температуры $\lambda = \lambda(T)$. Для многих материалов зависимость коэффициента теплопроводности от температуры близка к линейной:

$$\lambda = \lambda_0(1+bT), \quad (1.51)$$

где λ_0 — значение коэффициента теплопроводности при 0°C . Подставляя (1.51) в выражение закона Фурье получим:

$$q = -\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda_0(1+bT) \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (a)$$

Разделяя переменные и интегрируя выражение (a) в пределах от $x=0$ до $x=\delta$ и в интервале температур от T_{c1} до T_{c2} , получим:

$$q\delta = -\lambda_0 \left[1 + b \frac{T_{c1} + T_{c2}}{2} \right] (T_{c1} - T_{c2}). \quad (б)$$

В выражении (б) множитель $\lambda_0 \left[1 + b \frac{T_{c1} + T_{c2}}{2} \right]$ является средне-интегральной величиной коэффициента теплопроводности, т.е.

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{1}{(T_{c1} - T_{c2})} \int_{T_{c1}}^{T_{c2}} \lambda(T) dT. \quad (1.52)$$

При этом плотность теплового на поверхности пластины:

$$q = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{\delta} (T_{c1} - T_{c2}), \text{ Вт/м}^2. \quad (1.53)$$

Из уравнения (1.53) следует, что если коэффициент теплопроводности λ зависит, то q можно вычислить в предположении, $\lambda = \text{const}$, принимая для него средне интегральное значение в интервале температур от T_{c1} до T_{c2} .

Интегрируя выражение (a) в пределах от $x=0$ до любой текущей координаты x и в интервале температур от T_{c1} до T , получим выражение для температурного поля:

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_{c1} \right)^2 - \frac{2qx}{\lambda_0 b} - \frac{1}{b}}, \text{ } ^\circ\text{C}. \quad (1.54)$$

Согласно полученному уравнению, температура в стенке изменяется не линейно, а по кривой. Характер кривой определяется знаком и численным значением коэффициента b .

1.5.2. Теплопроводность в стержне постоянного сечения

Рассмотрим распространение тепла в прямом стержне с постоянным по длине поперечным сечением (рис.1.6). Обозначим площадь поперечного сечения через F и периметр через u . Пусть стержень находится в среде с постоянной температурой $T_{\text{ж}}$, коэффициент теплоотдачи от поверхности стержня к окружающей среде считается постоянным по всей поверхности. Пусть коэффициент теплопроводности материала стержня λ достаточно высокий. Поперечное сечение очень мало по сравнению с его длиной, поэтому можно пренебречь изменением температуры в поперечном сечении и считать, что она изменяется только вдоль оси стержня.

Для удобства, отсчет температуры будет вестись от $T_{\text{ж}} = \text{const}$. Отсчитанную таким образом избыточную температуру обозначим через ϑ . Очевидно:

$$\vartheta = T - T_{\text{ж}},$$

где $T_{\text{ж}}$ – температура среды окружающей стержень; T – текущая температура стержня.

Если задана температура основания стержня T_1 , то избыточная температура основания стержня будет:

$$\vartheta_1 = T_1 - T_{\text{ж}}.$$

На расстоянии x от основания стержня выделим элемент стержня длиной dx . Уравнение теплового баланса для рассматриваемого элемента стержня можно записать:

$$Q_x - Q_{x+dx} = dQ, \quad (a)$$

где Q_x – количество тепла, входящее в левую грань элемента за единицу времени; Q_{x+dx} – количество тепла, которое выходит из противоположной грани элемента за то же время; dQ – количество тепла, отдаваемого за единицу времени наружной поверхностью элемента окружающей его среде.

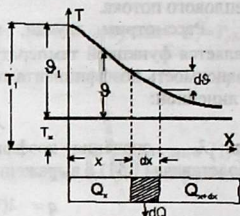


Рис. 1.6. Теплопередача через стержень

Согласно закону Фурье

$$Q_x = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} F, \text{ Вт}$$

Тогда

$$Q_{x+\Delta x} = -\lambda \frac{d}{dx} \left(\vartheta + \frac{d\vartheta}{dx} \Delta x \right) F,$$

Откуда

$$Q_{x+\Delta x} = -\lambda F \frac{d\vartheta}{dx} - \lambda F \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \Delta x,$$

Следовательно,

$$Q_x - Q_{x+\Delta x} = \lambda F \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \Delta x. \quad (6)$$

С другой стороны, согласно закону Ньютона-Римана

$$dQ = \alpha_p \vartheta u dx. \quad (7)$$

Приравняв (6) и (7), получим следующее дифференциальное уравнение, описывающее изменение температуры стержня:

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha_p u}{\lambda F} \vartheta = m^2 \vartheta, \quad (1.53)$$

где

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_p u}{\lambda F}}, \quad 1/\text{м}$$

При условии постоянства коэффициента теплоотдачи α_p по всей поверхности и постоянства λ в рассматриваемом интервале температур, величина $m = \text{const}$. Тогда общий интеграл для уравнения (1.53) будет:

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \quad (1.54)$$

Значения постоянных C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Граничные условия могут быть заданы по-разному в зависимости от длины стержня и других факторов.

Стержень бесконечной длины.

В начальном сечении стержня ее температура поддерживается постоянной, т.е. при $x=0$ $\vartheta = \vartheta_1$. Если длина стержня $l = \infty$, то все тепло, подводимое к стержню, будет отдано им в окружающую среду $x = \infty$ $\vartheta = 0$.

Подстановка граничных условий в уравнение (1.54) дает:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 & \quad \vartheta_1 = C_1 + C_2; \\ \text{при } x=\infty & \quad C_1 e^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Это равенство возможно только при $C_1 = 0$. Таким образом $C_2 = \vartheta_1$. Подставляя значения постоянных C_1 и C_2 в уравнение (1.54) получим

$$\vartheta = \vartheta_1 e^{-mx}, \text{ } ^\circ\text{C} \quad (1.55)$$

Количество тепла передаваемого стержнем в окружающую среду, очевидно будет равняться количеству тепла, проходящему через его основание.

Через основание стержня проходит тепловой поток

$$Q = -\lambda F \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0}, \text{ Вт}$$

Из уравнения (1.55) находим:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} = -m e^{-mx} \vartheta_1 \Big|_{x=0} = -m \vartheta_1.$$

Подставляя значения градиента температуры при $x=0$ в предыдущее уравнение для теплового потока, получим формулу, определяющую количество тепла (тепловой поток), отданного (или воспринятого) стержнем в окружающую среду):

$$Q = \lambda / m \vartheta_1 - \vartheta_1 \sqrt{\alpha_1 u \lambda F}, \text{ Вт} \quad (1.56)$$

Стержень конечной длины

Для стержня конечной длины дифференциальное уравнение (1.53) и его решение (1.54) сохраняют силу, но граничные условия будут другими:

при $x=0$

$$\vartheta = \vartheta_1;$$

при $x=l$:

$$-\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l} = \alpha_l \vartheta_l, \quad (1.57)$$

или

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l} = -\frac{\alpha_l}{\lambda} \vartheta_l,$$

где ϑ_l – температура на конце стержня; α_l – коэффициент теплоотдачи с торца стержня.

При $x=l$ имеет место равенство количества тепла, подведенного к торцу стержня за счет теплопроводности и количества тепла, сдаваемого поверхностью торца в окружающую среду за счет теплоотдачи.

Если теплоотдачей с конца стержня можно пренебречь, то граничные условия (1.57) можно записать в таком виде:

При $x=0$:

$$\vartheta = \vartheta_1;$$

При $x=l$:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l} = 0 \quad (1.57 \text{ а})$$

и

$$\vartheta = \vartheta_l.$$

Для определения C_1 и C_2 граничные условия (1.57 а) подставляем в (1.53):

$$\text{При } x=0 \quad \vartheta_1 = C_1 + C_2;$$

$$\text{При } x=l \quad \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=l} = C_1 m e^{ml} - C_2 m e^{-ml} = 0. \quad (1.57 б)$$

из полученных уравнений определяем постоянные C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{\vartheta_1}{1 + e^{2ml}},$$

$$C_2 = \vartheta_1 \frac{e^{2ml}}{1 + e^{2ml}}.$$

Подставляя полученные значения C_1 и C_2 в уравнение (1.54) получаем:

$$\vartheta = \vartheta_1 \left(\frac{e^{mx}}{1 + e^{2ml}} + \frac{e^{2ml} e^{-mx}}{1 + e^{2ml}} \right). \quad (1.58)$$

Умножив и разделив правую часть уравнения (1.58) на e^{-ml}

$$\vartheta = \frac{\vartheta_1}{e^{ml} + e^{-ml}} (e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)}).$$

Так как

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x) \quad \text{и} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x).$$

Уравнение (1.58) можно переписать в виде:

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{ch[m(l-x)]}{ch(ml)}, \quad \text{град.} \quad (1.58 а)$$

По формуле (1.58 а) можно вычислить температуру в любом сечении стержня. В предельном случае, когда $x=l$, формула (1.58 а) принимает вид:

$$\vartheta_{x=l} = \frac{\vartheta_1}{ch(ml)}, \quad \text{град.}$$

1.5.3. Теплопроводность полуограниченной плоской однородной пластины

Рассмотрим плоскую однородную пластину толщиной δ с постоянным коэффициентом теплопроводности λ и неограниченным размером в направлении оси ou . Предполагается, что на поверхности пластины, определяемых координатами $x=0$, $x=\delta$ и $y=\infty$ температура поддерживается постоянной и равной T_1 , а вдоль поверхности $y=0$ температура является функцией только координаты x , т.е. $T=f(x)$. Считается, что пластина относительно тонкая в направлении оси Oz , а внешние поверхности имеют идеальную тепловую изоляцию. Ввиду

этого градиентом температур $\frac{dT}{dz}$ можно пренебречь, и температурное поле такой пластины будет двухмерным.

Для двухмерной стационарной задачи без внутренних источников тепла дифференциальное уравнение теплопроводности запишется:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0, \quad (1.59)$$

где ϑ - избыточная температура, отсчитанная от T_1 , т.е.

$$\vartheta = T - T_1.$$

Граничные условия

$$\vartheta = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \delta \\ 0 & \text{при } y = \infty, \\ f(x) - T_1 = F(x) & \text{при } y = 0. \end{cases} \quad (1.60)$$

Для решения уравнений в частных производных (1.59) воспользуемся методом разделения переменных. Предположим, что $\vartheta = f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Тогда уравнение (1.59) приводится к виду

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi'(y)}{\psi(y)} = \text{const}. \quad (1.61)$$

Правая и левая части уравнения одинаковы и постоянны. Обозначим их через $(-\varepsilon^2)$. Таким образом, мы получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\varphi''(x) + \varepsilon^2 \varphi(x) = 0, \quad (1.62)$$

$$\psi''(y) - \varepsilon^2 \psi(y) = 0. \quad (1.63)$$

Решением дифференциального уравнения является функция вида:

$$\psi(x) = C_1 e^{(\varepsilon x)} + C_2 \sin(\varepsilon x). \quad (1.64)$$

Согласно (1.54) общее решение уравнения (1.63) будет иметь вид:

$$\psi(y) = C_3 e^{\varepsilon y} + C_4 e^{-\varepsilon y}. \quad (1.65)$$

Общее решение уравнения (1.58) получим после перемножения уравнений (1.64) и (1.65). Решение (1.64) будет удовлетворять граничному условию $\vartheta = 0$ при $x=0$ тогда, когда и $\varphi(x)=0$ при $x=0$ что возможно при $C_1 = 0$. Условие $\vartheta = 0$ при $y = \infty$, что возможно при $C_3=0$. Таким образом, решение для (1.58) приводится к виду

$$\vartheta = C e^{\varepsilon y} \sin(\varepsilon x).$$

Для того, чтобы полученное выражение удовлетворяло граничным условиям $\vartheta = 0$ при $x = \delta$, должно быть $\sin(\varepsilon\delta)=0$ или $\varepsilon = \pi/\delta$ (где $n = 1, 2, 3, \dots$).

Каждому значению n соответствует частное решение, а каждому частному решению соответствует свое значение постоянной интегрирования. Общее решение есть сумма частных решений для всех последовательных положительных значений чисел n :

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n e^{\frac{-n\pi}{\delta} y} \sin\left(\frac{-n\pi}{\delta} x\right). \quad (1.66)$$

Оставшаяся постоянная C_n определяется из граничных условий $\vartheta = F(x)$ при $y=0$. при этом

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \sin\left(\frac{-n\pi}{\delta} x\right).$$

Это равенство есть разложение функции $F(x)$ в ряд Фурье по синусам. Коэффициенты ряда Фурье определяются по следующему уравнению

$$C_n = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) dx.$$

Окончательное решение для температурного поля рассматриваемой задачи с учетом последнего уравнения можно записать в следующем виде:

$$\vartheta = \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{\frac{-n\pi}{\delta} y} \sin\left(\frac{-n\pi}{\delta} x\right) \int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) dx. \quad (1.67)$$

Окончательное решение рассмотренной задачи после определения постоянных интегрирования представится суммой бесконечного ряда.

При решении конкретной задачи вычисляют интеграл в уравнении (1.67), исходя из условий задания температуры. Следующим этапом является вычисление членов ряда в зависимости от условий сходимости и требуемой точности вычислений.

Например, если $T = T_2 = \text{const}$ при $y=0$, тогда $f(x) = T_2$, а $F(x) = T_2 - T_1$. Интеграл

$$\int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) dx = \frac{\delta}{n\pi} (T_2 - T_1) \left(-\cos \frac{\pi n}{\delta} x \right) \Big|_0^{\delta} = \frac{2\delta}{n\pi} (T_2 - T_1).$$

($n=1, 3, 5, 7, \dots$)

Подставляя этот интеграл в уравнение (1.67), получим

$$\begin{aligned} \vartheta = (T_2 - T_1) \frac{4}{\pi} \left[e^{\frac{-\pi}{\delta} y} \sin\left(\frac{\pi}{\delta} x\right) + \frac{1}{3} e^{\frac{-3\pi}{\delta} y} \sin\left(\frac{3\pi}{\delta} x\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} e^{\frac{-5\pi}{\delta} y} \sin\left(\frac{5\pi}{\delta} x\right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (1.68)$$

Для вычисления изотерм существуют различные методы. Наиболее точным является метод, при котором y принимается в качестве постоянного параметра [1-3].

Рассмотрим схему аналитического решения задач двумерной стационарной теплопроводности. Например, определим температуру в заданных точках на теплоизолированной полосе шириной $L=200\text{ мм}$ большой длины $S(S>L)$ и малой толщины δ ($\delta<L$); температура нижнего торца $T_1=373\text{ К}$, а боковых $T_a=293\text{ К}$ (рис.1.7).

Координаты первой точки: $x_1=40\text{ мм}$,
 $y_1=240\text{ мм}$; ($240/200=1,2$)

координаты второй точки: $x_2=80\text{ мм}$,
 $y_2=40\text{ мм}$. ($40/200=0,2$)

Решение: Для первой точки температуру определим по формуле (1.68):

Вспомним, что $\theta = T - T_a$ и $\theta_1 = T_1 - T_a$

Тогда запишем:

$$\theta = \theta / \theta_1 = (T - T_a) / (T_1 - T_a) =$$

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} e^{-\frac{n\pi y}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) =$$

$$= 4/\pi \{ [e^{-1\pi \cdot 1,2} \sin(1\pi \cdot 0,2)] + [e^{-3\pi \cdot 1,2} \sin(3\pi \cdot 0,2)] + \dots \} = 0,01727.$$

Температуру первой точки определим из соотношения

$$\theta / \theta_1 = (T - T_a) / (T_1 - T_a) = 0,01727, \text{ откуда } T = T_a + (T_1 - T_a) \cdot 0,01727 = 294,38\text{ К и т.д.}$$

В таблице 1.1 представлены результаты расчетов по формуле (1.68).

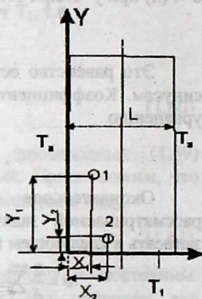


Рис.1.7. Плоская стенка, шириной L , температура нижнего торца T_1 , а боковых T_a .

Таблица значений функции $(T-T_a)/(T_1-T_a)$

Таблица 1.1

x	y=0,1	y=0,2	y=0,3	y=0,4	y=0,5	y=0,6	y=0,7	y=0,8	y=0,9	y=1,0
0,1	0,99	0,94	0,809	0,742	0,72	0,698	0,676	0,654	0,632	0,587
0,15	0,967	0,891	0,773	0,698	0,68	0,631	0,6	0,533	0,466	0,413
0,2	0,954	0,856	0,753	0,662	0,626	0,584	0,52	0,44	0,36	0,305
0,25	0,937	0,834	0,726	0,637	0,59	0,532	0,451	0,371	0,271	0,23
0,3	0,925	0,818	0,712	0,62	0,551	0,482	0,393	0,305	0,217	0,166
0,35	0,916	0,802	0,706	0,612	0,526	0,44	0,346	0,263	0,18	0,108
0,4	0,904	0,795	0,7	0,606	0,518	0,418	0,324	0,235	0,146	0,072
0,45	0,9	0,802	0,698	0,604	0,512	0,413	0,305	0,215	0,125	0,044
0,5	0,891	0,795	0,695	0,6	0,507	0,407	0,302	0,207	0,112	0,033

На рис. 1.8. представлен график функции $\theta = f(x/L, y/L)$ по выполненным расчетам.

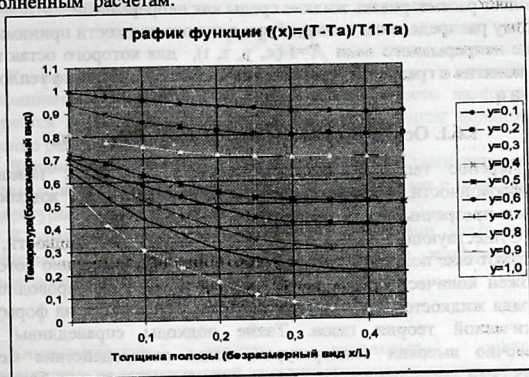


Рис.1.8. График функции $\theta = \vartheta/\vartheta_1 = (T - T_a) / (T_1 - T_a)$.

1.6. Конвективный теплообмен

Конвективным теплообменом называется передача теплоты при движении жидкости или газа. В реальных условиях, конвекция теплоты всегда сопровождается молекулярным переносом теплоты, а иногда и лучистым теплообменом. Конвективный теплообмен между движущейся средой и поверхностью ее раздела с другой средой (твердым телом, жидкостью, ил газом) называется *теплоотдачей*.

Конвективный теплообмен при движении жидкости под действием неоднородного поля массовых сил (гравитационного, магнитного, электрического) называется *свободной конвекцией*.

Конвективный теплообмен при движении жидкости под действием внешних сил, приложенных на границах системы, или однородного поля массовых сил, приложенных к жидкости внутри системы, или за счет кинетической энергии, сообщенной жидкости вне системы, называется *вынужденной конвекцией*.

Процесс теплоотдачи называется стационарным, если поле температур в жидкости не зависит от времени, и нестационарным, если распределение температуры в потоке зависит от времени.

В большинстве практических случаев, рассматриваемых теорией конвективного теплообмена, характерные размеры области течения

жидких сред намного больше длины свободного пробега молекул, что позволяет рассматривать жидкие среды как непрерывные. Поэтому распределение температуры в потоке жидкости принимается в виде непрерывного поля $T=f(x, y, z, t)$, для которого остаются в силе понятия о градиенте температуры и векторе плотности теплового потока q .

1.6.1. Особенности переноса тепла в жидкостях

Перенос тепла в жидкостях осуществляется с помощью теплопроводности, конвекции и излучения (для тех жидкостей, которые прозрачны в данном спектральном интервале).

Существующие представления о структуре жидкости, не позволяют еще получить систему соотношений, с помощью которых возможен количественный расчет коэффициента теплопроводности. Для ряда жидкостей развиваются подходы, основанные на формулах кинетической теории газов. Такие подходы справедливы при достаточно высоких температурах, когда взаимодействие между жидкостями уменьшается. При более низких температурах, близких к температуре кристаллизации, справедливо понятие «квазикристалличности» жидкости.

В жидкостях с электронной проводимостью (например, в расплавах металлов) теплопроводность складывается из двух частей: фотонной и электронной. Фотонная теплопроводность в жидкостях не имеет того смысла, что в твердых телах. Это связано с тем, что в жидкостях передача энергии происходит по механизму, совмещающему свойства и газа и твердого тела.

Особенно большое влияние на перенос тепла в жидкостях оказывают следующие физические параметры: коэффициент теплопроводности — λ , удельная теплоемкость — c , плотность — ρ , коэффициент температуропроводности — a и коэффициент вязкости — μ . Для каждого вещества эти параметры имеют определенные значения и, как правило, являются функцией температуры, а некоторые из них и давления.

В задачах конвективного теплообмена большое значение приобретает вязкость. Все реальные жидкости обладают вязкостью, между частицами и слоями, движущимися с различными скоростями, всегда возникает сила внутреннего трения, противодействующего движению. Согласно закону Ньютона эта касательная сила (отнесенная к единице поверхности), которая действует в любой точке потока, в плоскости, ориентированной по течению,

пропорциональна изменению скорости в направлении нормали к направлению движения:

$$s = \mu \frac{\partial w}{\partial n}$$

Коэффициент пропорциональности μ называется коэффициентом динамической вязкости или просто вязкости и измеряется в Па·с. При градиенте скорости, равном единице, он численно равен касательной силе.

Динамическая вязкость в основном зависит от температуры. Для капельных жидкостей динамическая вязкость убывает с повышением температуры, а для газов возрастает.

В уравнения гидродинамики и теплопередачи часто входит отношение вязкости и плотности, называемое коэффициентом кинематической вязкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \text{ м}^2/\text{с}.$$

Кинематическая вязкость капельных жидкостей пропорциональна динамической вязкости, так как их плотность слабо зависит от температуры. Напротив, у газов кинематический коэффициент вязкости сильно растет, так как с ростом температуры уменьшается их плотность. При течении жидкости или газа с вязкостью, наличие внутреннего трения приводит к диссипации (рассеянию) энергии, т.е. часть механической энергии переходит в тепловую и вызывает нагревание жидкости. Если вязкость жидкости или ее скорость невелики, то нагревание будет незначительным.

На теплоперенос оказывает влияние *сжимаемость* жидкости. *Изотермической сжимаемостью* или коэффициентом сжатия гела при постоянной температуре называют положительную величину

$$\epsilon_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_{T=\text{const}},$$

представляющую собой относительное изменение удельного объема при изменении давления на единицу. Для капельных жидкостей сжимаемость мала. Условной границей считается, что если число Маха $M < 0,25$, то жидкость несжимаемая.

Жидкие металлы характеризуются аномально высокой вязкостью в непосредственной близости к $T_{\text{пл}}$ (температуры плавления), что наиболее заметно в расплавах некоторых металлов. Около температуры плавления наблюдается также аномально высокая теплоемкость расплавов щелочных металлов.

На конвективный теплообмен также оказывает влияние *тепловое расширение* жидкости, которое характеризуется температурным коэффициентом объемного расширения, определяемым уравнением

$$\beta = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p=\text{const}},$$

представляющим собой относительное изменение удельного объема при изменении температуры на один градус.

В неравномерно нагретой жидкости вследствие теплового расширения возникает неоднородное поле плотности, что в конечном итоге может привести к свободному движению.

1.6.2. Гидродинамический и тепловой пограничные слои

Рассмотрим продольное обтекание поверхности тела безграничным по током жидкости. Скорость и температура набегающего потока постоянны и равны w_0 и t_0 . На поверхности тела частицы жидкости прилипают к ней. В результате в области около пластины вследствие действия сил вязкости образуется тонкий слой слабо заторможенной жидкости, в пределах которого скорость изменяется от нуля на поверхности тела до скорости невозмущенного потока (вдали от тела), который называется *гидродинамический пограничный слой* (рис. 1.9,а). Это понятие впервые было введено Л. Прандтлем в 1904 г. С увеличением координаты x , отсчитываемой от передней кромки тела, толщина δ гидродинамического пограничного слоя увеличивается.

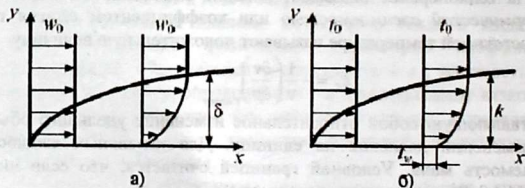


Рис. 1.9. Гидродинамический и тепловой пограничные слои.

Для течения жидкости внутри пограничного слоя $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$, вне пограничного слоя и на его внешней границе $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ и $w = w_0$.

Течение в пограничном слое может быть *ламинарным* и *турбулентным*. Сначала ламинарное, затем может перейти в

турбулентное. Граница перехода не является точкой, это отрезок, которому соответствует неустойчивый переходный режим. Для турбулентного пограничного слоя характерным является то, что в пристеночной области имеется тонкий вязкий ламинарный подслой почти постоянной толщины, так как условие прилипания не допускает пульсаций скорости на стенке.

Аналогично понятию гидродинамического пограничного слоя Г.Н. Кружилиным было введено понятие *теплового пограничного слоя* (рис. 1.9,б). Тепловой пограничный слой – это слой жидкости у стенки, в пределах которого температура изменяется от T_0 до T_w . Для области внутри теплового пограничного слоя $\partial T / \partial y \neq 0$, а на внешней границе $\partial T / \partial y = 0$ и $t=t_0$. Таким образом, все изменение температуры жидкости сосредоточено в сравнительно тонком слое, непосредственно прилегающем к поверхности тела.

Толщины гидродинамического и температурного пограничных слоев в общем случае неравны, соотношение толщин зависит от рода жидкости и формы поверхности. Форма и размеры теплоотдающей поверхности существенно влияют на теплоотдачу. В зависимости от этих факторов может резко меняться характер обтекания поверхности, по-иному строиться погранслой. В технике имеется большое многообразие поверхностей нагрева, но даже если взять лишь простые геометрические формы тела – плиту и трубу, то из них можно составить большое количество теплоотдающих поверхностей.

1.6.3. Плотность теплового потока на поверхности теплообмена и уравнение теплоотдачи

Основной задачей теории конвективного теплообмена является установление связи между плотностью теплового потока на поверхности теплообмена, температурой этой поверхности и температурой жидкости. В непосредственной близости к поверхности теплообмена существует неподвижный слой жидкости, через который теплота передается только путем теплопроводности. Тогда в соответствии с гипотезой Фурье имеем

$$q_F = -\lambda_x \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{n=0}$$

Из этого уравнения следует, что для определения плотности теплового потока на стенке необходимо знать распределение температуры в потоке жидкости. Еще первые опыты по конвективному теплообмену показали, что во многих случаях

плотность теплового потока пропорциональна разности температур между жидкостью и поверхностью тела (закон теплоотдачи Ньютона): $q_F = \alpha(T_{ж} - T_{ст})$,

В общем случае пропорциональность между тепловым потоком и разностью температур может нарушаться, тем не менее, коэффициент теплоотдачи получил широкое распространение в практике теплотехнических расчетов.

Величина коэффициента теплоотдачи зависит от многих факторов, наиболее существенными из них являются: причина движения жидкости (естественная или вынужденная конвекция), режим течения жидкости (ламинарный или турбулентный), скорость жидкости, теплофизические параметры жидкости ($\lambda_{ж}$, $\mu_{ж}$, $c_{ж}$, $\rho_{ж}$), геометрическая форма и размеры тела, наличие фазовых переходов.

Дифференциальное уравнение теплоотдачи выводится на основе анализа теплообмена в месте соприкосновения теплоносителя со стенкой. Тепловой поток через элементарную площадку поверхности твердой стенки dF можно выразить по закону Фурье через температурный градиент в пристенном слое жидкости и коэффициент теплопроводности жидкости:

$$dQ = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0} dF.$$

Этот же тепловой поток можно определить формулой Ньютона

$$dQ = \alpha(T_f - T_w) dF = \alpha \Delta T dF.$$

Приравнявая эти выражения и упрощения, получим

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\Delta T} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (1.69)$$

или в приведенном виде

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_w} \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_{n=0},$$

где $\vartheta_w = T_w - T_0$ – приведенная температура.

Эти два уравнения, позволяющие по известному полю температур в жидкости определить коэффициент теплоотдачи, называются *уравнениями теплоотдачи*.

1.6.4. Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности представляет собой закон сохранения вещества при движении жидкости.

Рассматривается элементарный объем $dV = dx dy dz$, в который в направлении x через контрольную поверхность $dS_x = dy dz$ поступает за единицу времени поток массы $dG_x = M_x dS_x$, а через поверхность dS_{x+dx} вытекает поток $dG_{x+dx} = M_{x+dx} dS_x$, (рис. 1.10).

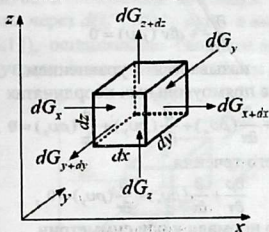


Рис. 1.10. Элементарный объем.

Раскладывая M_{x+dx} в ряд по величине dx можно получить

$$M_{x+dx} = M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx$$

Разность массовых потоков $(dG_{x+dx} - dG_x)$, равна результирующему массовому потоку по оси x

$$dG_{x+dx} - dG_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} dS_x dx = \frac{\partial M_x}{\partial x} dV$$

Суммируя результирующие массовые потоки по координатам x, y, z получим

$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} \right) dV = \sum_{i=x,y,z} \left(\frac{\partial M_i}{\partial t} \right) dV$$

Согласно закону сохранения массы эта величина равна убыванию массы в объеме dV в единицу времени за счет уменьшения плотности (т. к. выходящий поток dM_{i+di} больше входящего dM_i)

$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} \right) dV = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = 0$$

В векторной форме, M - вектор плотности массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} M = 0 \quad (1.70)$$

При движении среды со средней скоростью v , $M = \rho v$ (вектор плотности потока массы связан с вектором скорости и плотностью очевидным соотношением). Следовательно, для сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (1.71)$$

Уравнение (1.71) называется уравнением сплошности или неразрывности. или в прямоугольных координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (1.72)$$

Для осесимметричного течения

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r) = 0,$$

где r – расстояние по нормали к оси симметрии.

Для стационарного течения сжимаемой жидкости уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0; \quad \operatorname{div}(\rho v) = 0; \quad \rho v = \text{const}, \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \end{aligned}$$

Если ввести $G = mS$, получается известное уравнение расхода

$$G = \rho v S = \text{const}.$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$. уравнение неразрывности имеет вид

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (1.73)$$

и становится уравнением неразрывности. В прямоугольных координатах

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.74)$$

В уравнение неразрывности входят три компоненты скорости: v_x , v_y , v_z , и одного этого уравнения недостаточно для определения поля скоростей ω в потоке жидкости.

1.6.5. Закон сохранения энергии для движущейся среды

Дифференциальное уравнение энергии выводится на основании закона сохранения энергии и закона Фурье. Рассмотрим получение уравнения для движущейся среды с равномерно распределенными внутренними источниками теплоты. Предполагается, что теплоноситель представляет собой изотропное тело с

теплопроводностью λ , теплоемкостью c_p и плотностью ρ , независящим от температуры.

Выделен неподвижный элементарный параллелепипед с гранями dx , dy и dz и обозначим входящие в него за время $d\tau$ количество теплоты через dQ_x' , dQ_y' , dQ_z' , а выходящие через dQ_x'' , dQ_y'' , dQ_z'' (рис. 1.11), оставляющие скорости движения среды u_x , u_y , u_z и мощность внутренних источников теплоты q_v [Вт/м³].

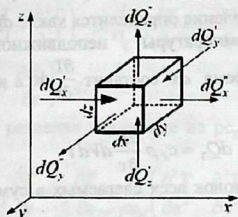


Рис. 1.11. Элементарный параллелепипед

На основе закона сохранения энергии баланс теплоты для рассматриваемого параллелепипеда имеет вид, как и в случае вывода уравнения теплопроводности, запишется (п.п. 1.3)

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ_3,$$

где dQ_1 — разность между входящим и выходящим из параллелепипеда количеством теплоты; dQ_2 — внутреннее тепловыделение; dQ_3 — изменение энтальпии в элементарном объеме.

Теплоту, входящую в параллелепипед вдоль оси x и выходящую из него, можно определить по формулам:

$$dQ_x' = q_x' dydzd\tau,$$

$$dQ_x'' = q_x'' dydzd\tau.$$

где q_x' и q_x'' — плотности теплового потока, отвечающие координатам x и $x+dx$ соответственно.

Разложим величину q_x'' в ряд, ограничившись двумя первыми членами ряда

$$q_x'' = q_x' + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (1.75)$$

Разница между вошедшим и вышедшим из параллелепипеда количеством теплоты вдоль оси x с учетом выражения (1.75) запишется формулой

$$dQ_x = dQ_x' - dQ_x'' = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz d\tau = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dV d\tau.$$

Таким же образом, можно записать

$$= dQ_y - \frac{\partial q_y}{\partial y} dV d\tau, \quad dQ_z = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dV d\tau,$$

Общее количество теплоты, аккумулированное в параллелепипеде равно

$$dQ_1 = dQ_x + dQ_y + dQ_z = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dV d\tau.$$

Внутреннее тепловыделение определится как $dQ_2 = q_v dV d\tau$,

Изменение температуры неподвижного элементарного параллелепипеда за время $d\tau$ составит $\frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau$ а изменение энтальпии на величину (1.24):

$$dQ_3 = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dV d\tau.$$

И, после подстановок всех слагаемых в сумме можно получить уравнение

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_v. \quad (1.76)$$

Рассмотрим более подробно составляющие плотности теплового потока, входящие в это уравнение. Величина q_x запишется выражением

$$q_x = q_{x \text{ тепл}} + q_{x \text{ конв}}$$

где $q_{x \text{ тепл}}$ и $q_{x \text{ конв}}$ — плотности теплового потока, входящего в параллелепипед путем теплопроводности и конвективного переноса вдоль оси x .

На основе закона Фурье имеем

$$q_{x \text{ тепл}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Конвективная составляющая равна

$$q_{x \text{ конв}} = \rho c_p v_x T$$

где w_x — составляющая скорости потока вдоль оси x .

Следовательно

$$q_x = \rho c_p v_x T - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

При $\lambda = \text{const}$ из этого равенства получается

$$\frac{\partial q_x}{\partial \tau} = \rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

точно также можно записать для составляющих по оси y и z .

$$\frac{\partial q_y}{\partial \tau} = \rho c_p \left(v_y \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial q_z}{\partial \tau} = \rho c_p \left(v_z \frac{\partial T}{\partial z} + T \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

где v_y и v_z [м/с] – составляющие скорости потока вдоль осей y и z .
Подстановка полученных выражений в (1.76) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = & \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \\ & - \rho c_p T \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + q_v \end{aligned} \quad (1.77)$$

Используя (1.74), и разделив слагаемые на ρc_p , (1.77) приводится к виду

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\rho c_p}$$

Т.к. $\frac{\lambda}{\rho c_p} = a$ – коэффициент температуропроводности (1.29), и

выражение в скобках можно записать с помощью оператора Лапласа, получаем дифференциальное уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \Delta T + \frac{q_v}{\rho c_p} \quad (1.78)$$

В общем случае $T = f(x, y, z, \tau)$. Поэтому, используя понятие производной, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\tau} &= \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{d\tau}, \\ \frac{DT}{d\tau} &= \frac{\partial T}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Здесь, $\frac{DT}{d\tau}$ – называют субстанциональной производной, т.к. она связана с движущейся материей или субстанцией.

Таким образом, с учетом (1.79), дифференциальное уравнение энергии (1.78) примет вид

$$\frac{dT}{d\tau} = a \Delta T + \frac{q_v}{\rho c_p} \quad (1.80)$$

При отсутствии внутренних источников теплоты из уравнения (1.80) имеем

$$\frac{d\Gamma}{d\tau} = a\Delta T, \text{ или}$$

$$\rho c_p \frac{d\Gamma}{d\tau} = \lambda \Delta T = \lambda \nabla^2 T \quad (1.81)$$

В дифференциальное уравнение энергии в качестве неизвестной величины входит скорость движения жидкости. Таким образом, для определения распределения температуры в потоке жидкости необходимо предварительно решить гидродинамическую задачу, т.е. определить распределение скоростей в потоке жидкости.

1.6.6. Закон сохранения количества движения вязкой жидкости

Вывод уравнения движения основан на втором законе Ньютона: сила равна массе, умноженной на ускорение.

Выделим в потоке вязкой жидкости элементарный объем dx, dy, dz . Скорость в потоке изменяется только в направлении оси y , закон изменения скорости произволен (рис. 1.12).

Силы, действующие на рассматриваемый элемент жидкости, можно разделить на массовые (или объемные) и поверхностные.

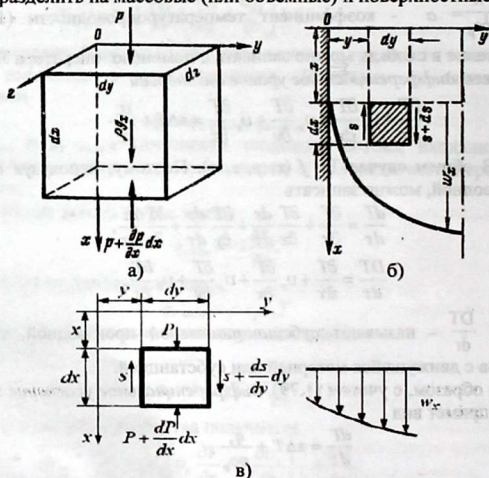


Рис. 1.12. а) Элементарный объем потока жидкости; б) Сила трения, действующая на элемент движущейся жидкости; в) Элемент жидкости.

Массовые силы характеризуются вектором F , значение которого равно отношению силы, действующей на данную частицу, к массе этой частицы. Если учитывается только сила тяжести, то $F = mg$. Значение поверхностных сил равно отношению силы, действующей на элемент поверхности, к величине площади этого элемента. К поверхностным силам относятся силы трения и силы давления.

Таким образом, на рассматриваемый элемент жидкости действуют три силы: сила тяжести, равнодействующая сил давления и равнодействующая сил трения. Найдем проекции на ось Ox .

Сила тяжести приложена в центре тяжести элемента. Ее проекция на ось Ox равна произведению проекции ускорения свободного падения g_x на массу элемента:

$$\rho g_x dv. \quad (a)$$

Равнодействующая сила давления определяется следующим образом. Если на верхней грани элемента давление жидкости равно P , то на площадку $dydz$ действует сила $Pdydz$. На нижней грани давление равно $P + \frac{\partial P}{\partial x} dx$, и на эту грань действует сила:

$$-\left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\right) dx dy dz.$$

Знак минус указывает на то, что сила действует против направления движения жидкости. Равнодействующая сил давления равна их алгебраической сумме:

$$P dx dy dz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\right) dx dy dz = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = -\frac{\partial P}{\partial x} dv \quad (b)$$

Равнодействующая сил трения определяется следующим образом. Так как скорость изменяется только в направлении оси Oy , то сила трения возникает на боковых гранях элемента жидкости. Около левой грани скорость движения частиц меньше, чем в самом элементе, поэтому в сечении y сила трения направлена против движения частиц и равна $s dx dy$. Около правой грани, наоборот, скорость движения частиц жидкости больше, чем в самом элементе, поэтому здесь в сечении $y+dy$ сила трения направлена в сторону движения. Равнодействующая этих сил равна алгебраической сумме:

$$\left(S + \frac{ds}{dy} dy\right) dx dz - s dx dz = \frac{ds}{dy} dy,$$

где s — касательная сила трения на единицу поверхности; согласно закону Ньютона $s = \mu \frac{dv_x}{dy}$. Подставляя это значение в предыдущее уравнение и принимая $\mu = \text{const}$, окончательно получаем:

$$\frac{ds}{dy} dv = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} dv \quad (\text{в})$$

Суммируя выражения (а), (б) и (в), получаем проекцию на ось Ox равнодействующей всех сил, приложенных к объему:

$$\rho g_x dv - \frac{\partial P}{\partial x} dv + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} dv \quad (\text{г})$$

Согласно второму закону механики эта равнодействующая равна произведению массы элемента ρdv на его ускорение dv_x/dt и учитывает силы инерции:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} dv \quad (\text{д})$$

Приравняв друг другу уравнения (г) и (д), получаем дифференциальное уравнение движения вдоль оси Ox :

$$\rho \frac{dv_x}{d\tau} dv = \rho g_x dv - \frac{\partial P}{\partial x} dv + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} dv,$$

и сокращая на dv , окончательно можно записать

$$\rho \frac{dv_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}. \quad (1.82)$$

Описание движения жидкости усложняется, если скорость изменяется по трем направлениям:

— для оси Ox :

$$\rho \frac{dv_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{d^2 v_x}{dx^2} + \frac{d^2 v_x}{dy^2} + \frac{d^2 v_x}{dz^2} \right), \quad (1.83)$$

— для оси Oy :

$$\rho \frac{dv_y}{d\tau} = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{d^2 v_y}{dx^2} + \frac{d^2 v_y}{dy^2} + \frac{d^2 v_y}{dz^2} \right), \quad (1.84)$$

— для оси Oz :

$$\rho \frac{dv_z}{d\tau} = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{d^2 v_z}{dx^2} + \frac{d^2 v_z}{dy^2} + \frac{d^2 v_z}{dz^2} \right). \quad (1.85)$$

Уравнения (1.83) — (1.85) называют уравнениями *Навье-Стокса*. В общем случае составляющие скорости v_x , v_y , v_z изменяются во времени и в пространстве. Член, стоящий в левой

части уравнений (1.83) – (1.85), представляет собой полную производную по времени.

На основании понятия о полной производной имеем:

$$\frac{dv_x}{d\tau} = \frac{\partial v_x}{\partial \tau} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{d\tau},$$

$$\frac{dv_x}{d\tau} = \frac{\partial v_x}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Аналогично и для других осей можно записать

$$\frac{dv_y}{d\tau} = \frac{\partial v_y}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$\frac{dv_z}{d\tau} = \frac{\partial v_z}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Используя векторную форму записи, уравнения (1.83) – (1.85) можно записать в виде:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{d\tau} = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (1.86)$$

Система дифференциальных уравнений энергии, неразрывности, движения описывают бесконечное множество процессов конвективного теплообмена. Чтобы выделить конкретно рассматриваемый процесс, необходимо сформулировать условия однозначности, которые содержат геометрические, физические, временные и граничные условия [1-5].

1.6.7. Критерии подобия конвективного теплообмена

Конвективный теплообмен описывается системой дифференциальных уравнений и условиями однозначности с большим количеством переменных. Попытки аналитического решения этой системы уравнений наталкиваются на серьезные трудности. Поэтому большое значение имеет всегда экспериментальный путь исследования. С помощью эксперимента для определенных значений аргументов можно получить численные значения искомых переменных и затем подобрать уравнения, описывающие результаты опытов. Однако при изучении столь сложного процесса как конвективный теплообмен, не всегда легко проводить и опытное исследование.

Для исследования влияния на процесс какой-либо одной величины остальные нужно сохранять неизменными, что не всегда возможно или затруднительно из-за большого количества переменных. Кроме того, при этом нужно быть уверенным, что

результаты, получаемые с помощью какой-либо конкретной установки (модели), можно перенести и на другие аналогичные процессы (образец). Эти трудности помогает разрешить *теория подобия*.

С помощью *теории подобия* размерные физические величины можно объединить в безразмерные комплексы, причем так, что число комплексов будет меньше числа величин, из которых составлены комплексы. Полученные безразмерные комплексы можно рассматривать как новые переменные.

При введении в уравнения безразмерных комплексов число величин под знаком функции формально сокращается, что упрощает исследование физических процессов. Кроме того, новые безразмерные переменные отражают влияние не только отдельных одиночных факторов, но и их совокупности, что позволяет легче определить физические связи в исследуемом процессе [1-5].

Безразмерные комплексы состоят из разнородных физических величин. Этим комплексам называемым критериями подобия, присвоены имена ученых, внесших значительный вклад в развитие гидродинамики или теплопередачи.

Критерий Нуссельта или критерий теплоотдачи

$$Nu = \alpha \delta_0 / \lambda.$$

Число Нуссельта, характеризует теплообмен на границе «стенка – жидкость» - соотношение между конвективным переносом теплоты от жидкости к поверхности тела и переносом теплоты теплопроводностью через слой жидкости толщиной δ_0 , где α - коэффициент теплоотдачи. В задачах конвективного теплообмена *критерий Нуссельта* обычно является искомой величиной, в которую входит определяемая величина α .

Критерием Рейнольдса называют, безразмерный комплекс

$$Re = \omega_0 \ell / \nu = \rho \omega_0 \ell / \mu.$$

Он характеризует соотношение сил инерции и сил вязкости (силам трения). Здесь, ω_0 - характеристическая скорость потока, ℓ - характеристический размер, ν - коэффициент кинематической и m^2/s . *Число Рейнольдса* является очень важной характеристикой как изотермического, так и неизотермического процессов течения жидкости.

Третий безразмерный комплекс обозначают:

$$Pe = \omega_0 \ell / a$$

и называют *критерием Пекле*. *Число Пекле*, выражает отношение между интенсивностью теплопереноса теплоты конвекцией и

интенсивностью переноса теплоты теплопроводностью. В комплексе Пекле, a — температуропроводность. Безразмерный комплекс

$$Eu = p / (\rho \omega_0^2)$$

называют критерием *Эйлера*. Это критерий характеризует соотношение сил давления и сил инерции. В уравнение конвективного теплообмена входит только под знаком производной. Следовательно, для рассматриваемого нами несжимаемой жидкости с постоянными физическими параметрами существенно не абсолютное значение давления, а его изменение. Поэтому *критерий Эйлера* обычно представляют в виде

$$Eu = (p - p_0) / (\rho \omega_0^2)$$

где p_0 — какое-либо фиксированное значение давления, например давления на входе в канал. Это значение давления может быть неизвестной величиной.

Безразмерный комплекс

$$Pr = \mu c_p / \lambda,$$

называется *критерием Прандтля*. *Критерий Прандтля* целиком составлен из физических параметров, а поэтому и сам является физическим параметром. Его можно записать и в следующем виде

$$Pr = Pe / Re = \mu c_p / \lambda = \nu / a.$$

Число Прандтля выражает отношение *числа Пекле* к *числу Рейнольдса*: здесь μ — коэффициент динамической вязкости, Па·с (кг/(м·с)); λ — коэффициент теплопроводности жидкости; c_p — теплоемкость жидкости.

Число Прандтля представляет собой отношение двух физических констант и само является физической константой.

Критерий Прандтля капельных жидкостей сильно зависит от температуры, причем для большинства жидкостей эта зависимость в основном аналогична зависимости вязкости μ , т.к. теплоемкость c_p и коэффициент теплопроводности λ , от температуры зависят более слабо. Как правило, при увеличении температуры Pr резко уменьшается. Низкие значения *критерия Прандтля* объясняются более высоким коэффициентом теплопроводности.

Критерий Прандтля жидких металлов изменяется в пределах $Pr \approx 0,005 - 0,05$. Малые значения Pr жидких металлов объясняются высокой теплопроводностью последних (рис. 1.13).

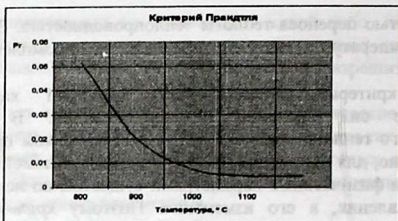


Рис. 1.13. Изменения критерия Прандтля для жидких металлов

1.6.8. Подобие и моделирование процессов конвективного теплообмена

Рассматривается поверхность твердого тела, которая омывается несжимаемой жидкостью (рис. 1.14). Температура и скорость жидкости вдали от тела постоянны и равны, соответственно, T_0 и v_0 . Размер тела — l_0 задан. Температура поверхности тела равна T_w .

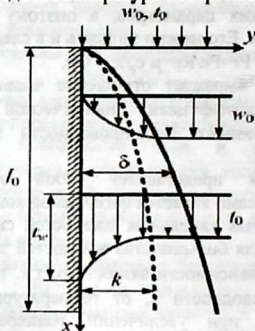


Рис. 1.14. Расчетная схема

Для определенности принимается, что $T_w > T_0$. Полагается, что физические параметры жидкости постоянны (учитывается только подъемная сила, возникающая в результате зависимости плотности от температуры). Теплота трения не учитывается. Рассматриваемый процесс является стационарным.

Расположение осей координат так, как показано на рис. 1.14. Для простоты принимается, что ось y нормальна к поверхности тела, а ось x направлена вдоль тела и вертикальна. При этом $g_x = g$, а проекции вектора силы тяжести (или подъемной силы) на оси y и z будут равны нулю ($g_y = g_z = 0$). При принятых условиях конвективный теплообмен описывается системой дифференциальных уравнений (1.69), (1.74), (1.79), (1.82), для которой из-за стационарности процесса равны нулю частные производные по времени.

Учитывается дополнительно подъемная сила $\rho g \beta \vartheta$, считая ее соизмеримой с вязкостным членом $\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}$. Вводится также обозначение $\vartheta = T - T_0$, где T – температура жидкости ($dT = d\vartheta$, так как $T_0 = \text{const}$).

Система дифференциальных уравнений для рассматриваемого случая примет вид:

– уравнение энергии

$$v_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}$$

– уравнение движения

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \rho g \beta \vartheta$$

– уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Граничные условия:

– вдали от тела ($y = \infty$)

$$\vartheta = \vartheta_0 = 0; \quad v_x = v_0; \quad v_y = 0;$$

– на поверхности тела ($y = 0, 0 \leq x \leq l_0$)

$$\vartheta = \vartheta_w \equiv T_w - T_0 = \text{const}; \quad v_x = v_0 = v_y = 0.$$

В уравнениях и граничных условиях можно выделить три вида величин:

- 1) независимые переменные – координаты x, y ;
- 2) зависимые переменные – ϑ, v_x, v_y ;
- 3) постоянные величины – $v_0, t_0, l_0, \vartheta_w, \nu, a, g, \beta$ и др.

Т.о., искомые переменные ϑ, v_x, v_y зависят от большого числа величин: они являются функцией независимых переменных и постоянных величин.

Приведение дифференциальных уравнений конвективного теплообмена к безразмерному виду.

Вводятся безразмерные величины:

$$X = \frac{x}{\ell_0}; \quad Y = \frac{y}{\ell_0}; \quad W_x = \frac{v_x}{v_0}; \quad W_y = \frac{v_y}{v_0}; \quad \Theta = \frac{\theta}{\theta_w},$$

тогда

$$x = X\ell_0; \quad y = Y\ell_0; \quad v_x = W_x v_0; \quad v_y = W_y v_0; \quad \theta = \Theta \theta_w.$$

После преобразования получается:

– уравнение энергии

$$\frac{v_0 \ell_0}{a} \left(W_x \frac{\partial \Theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2};$$

– уравнение движения

$$\frac{v_0 \ell_0}{\nu} \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_y}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{g \beta \theta_w \ell_0^3}{\nu^2} \frac{\nu}{v_0 \ell_0} \Theta;$$

– уравнение неразрывности

$$\frac{v_0}{\ell_0} \left(\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} \right) = 0$$

или, так как v_0/ℓ_0 не равно нулю,

$$\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} = 0$$

Граничные условия тоже приводятся к безразмерному виду:

– вдали от тела ($Y = \infty$)

$$\Theta = \Theta_0 = 0; \quad W_x = 1; \quad W_y = 0;$$

– на поверхности тела ($Y = 0, \quad 0 \leq X \leq 1$)

$$\Theta = \Theta_w = 1; \quad W_x = W_y = 0.$$

При известном температурном поле коэффициент теплоотдачи может быть определен по уравнению:

$$\alpha = - \frac{\lambda}{T_w - T_0} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

или в безразмерном виде:

$$\frac{\alpha \ell_0}{\lambda} = - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{Y=0}$$

Помимо безразмерных величин Θ , W_x , W_y и безразмерных координат, в уравнения входят также безразмерные комплексы (числа подобия), некоторые из них были рассмотрены ранее (п.п. 1.6.6):

$$Nu = \frac{\alpha \ell_0}{\lambda}; \quad Re = \frac{v_0 \ell_0}{\nu}; \quad Pe = \frac{v_0 \ell_0}{a}; \quad Gr = \frac{g \beta \theta_w \ell_0^3}{\nu^2}.$$

Безразмерный комплекс Gr называют *числом Грасгофа*. Оно характеризует отношение подъемной силы, возникающей вследствие разности плотностей к силам вязкостного трения.

Очень часто применяют *число Прандтля*: $Pr = \nu/a = Pe/Re$

Используя введенные обозначения, систему дифференциальных уравнений можно записать в виде:

– уравнение теплопроводности

$$Nu = - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{Y=0};$$

– уравнение энергии

$$Pe \left(W_x \frac{\partial \Theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2};$$

– уравнение движения

$$Re \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_y}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{Gr}{Re} \Theta;$$

– уравнение неразрывности

$$\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} = 0$$

Безразмерные величины Θ , W_x , W_y , X , Y , Nu , Re , Pe , Gr можно рассматривать как новые переменные, которые можно разделить на три группы:

– *независимые переменные* – это безразмерные координаты X , Y ;

– *зависимые переменные* – Θ , W_x , W_y , Nu ; они однозначно определяются значениями независимых переменных при определенных значениях величин, входящих в уравнения однозначности;

– *постоянные величины* – Re , Pe , Gr ; они заданы условиями однозначности и для конкретной задачи являются заданными.

В результате можно записать:

$$Nu = f_1(X_w, Y_w, Pe, Re, Gr); \quad (1.87)$$

$$\Theta = f_2(X, Y, Pe, Re, Gr); \quad (1.88)$$

$$W_x = f_3(X, Y, Pe, Re, Gr); \quad (1.89)$$

$$W_y = f_4(X, Y, Pe, Re, Gr). \quad (1.90)$$

Уравнения вида (1.87) – (1.90) называют *уравнениями подобия*.

1.6.9. Условия подобия физических процессов

Попытки аналитического решения системы уравнений наталкиваются на серьезные трудности. В настоящее время точные решения имеются только для отдельных частных случаев. Поэтому

большое значение приобретает экспериментальный путь исследования. С помощью эксперимента для определенных значений аргументов можно получить численные значения искомых переменных и затем подобрать уравнения, описывающие результаты опытов. Однако при изучении столь сложного процесса, как конвективный теплообмен, не всегда легко проводить и опытное исследование.

Для исследования влияния на процесс какой-либо одной величины остальные нужно сохранять неизменными, что не всегда возможно или затруднительно из-за большого количества переменных. Кроме того, при этом нужно быть уверенным, что результаты, получаемые с помощью какой-либо конкретной установки (модели), можно перенести и на другие аналогичные процессы (образец). Эти трудности помогает разрешить теория подобия.

Явления, принадлежащие одному и тому же классу, описываются одинаковыми по физическому содержанию и форме записи дифференциальными уравнениями и называются подобными процессами. Те явления природы, которые описываются одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями, но различны по своему физическому содержанию, называются аналогичными.

Система безразмерных дифференциальных уравнений, так же как и исходная система размерных уравнений, описывает бесконечное множество конкретных процессов конвективного теплообмена. Уравнения будут справедливы для любого процесса теплоотдачи между твердым телом и несжимаемой жидкостью, удовлетворяющего данной формулировке задачи. Таким образом, записанная ранее система дифференциальных безразмерных уравнений описывает совокупность физических процессов, характеризующихся одинаковым механизмом.

Различают три правила подобия физических процессов.

1. Подобные процессы должны быть качественно одинаковыми, т.е. они должны иметь одинаковую физическую природу и описываться одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями.
2. Условия однозначности подобных процессов должны быть одинаковыми во всем, кроме числовых значений размерных постоянных, содержащихся в этих условиях.
3. Определяющие безразмерные переменные подобных процессов должны иметь одинаковое числовое значение.

Следовательно, рассматриваемые подобные процессы описываются единой формулой, например $Nu = f_1(X_w, Re, Pr)$.

Определяющий размер и температура

Определяющий размер. В случае, если в условия однозначности входит несколько размеров, определяющим считается тот, от которого процесс теплоотдачи зависит в наибольшей степени (обтекание пластины – ее длина, движение жидкости в длинной трубе – ее диаметр и т. д.). В некоторых случаях (теплообмен при фазовых переходах) за линейный размер принимается комбинация разнородных физических величин, входящих в условия однозначности, которая имеет размерность линейной величины и пропорциональна какому-либо линейному размеру. При использовании критериальных уравнений всегда нужно обращать внимание на то, какой размер в формуле введено в критерии подобия в качестве определяющего. Если, не учитывая эти обстоятельства могут быть значительные ошибки.

Считается, что для пластины определяющим размером является длина в направлении потока. Для круглых труб – диаметр. Для труб некруглого поперечного сечения – эквивалентный диаметр, значение которого определяется как $d_3 = 4F/P$, где F – площадь поперечного сечения трубопровода, P – периметр сечения трубопровода.

Определяющая температура. В критерии входят физические параметры жидкости. В процессе теплообмена температура жидкости меняется, следовательно, меняются и значения ее физических параметров. В истории развития теплопередачи было много противоречивых взглядов по этому вопросу. Соответствующим выбором определяющей температуры многие исследователи пытались получить более универсальные формулы. В качестве определяющей температуры использовались температура стенки, средняя температура жидкости, какая-либо из температур жидкости на входе или выходе (чаще первая) и целый ряд комбинаций из этих температур. Однако экспериментальные и теоретические работы показывают, что нет универсальной определяющей температуры, в которой автоматически учитывалась бы зависимость теплоотдачи от изменения физических параметров. Поэтому, считается, что за определяющую температуру следует принимать такую температуру, которая в технических расчетах бывает задана и легко может быть определена.

Теплоотдача при движении жидких металлов в трубах.

Наряду с газами и капельными жидкостями в качестве теплоносителей применяют жидкие (расплавленные) металлы. Наиболее приемлемыми теплоносителями этого типа являются щелочные и тяжелые металлы и их сплавы: такие как ртуть, натрий, калий, литий, висмут, галлий, свинец, олово, сплавы висмута со свинцом и т.д.

Физические свойства жидких металлов существенно отличаются от свойств обычных теплоносителей – воды, масла и др. металлов. Достоинством этих теплоносителей является то, что они имеют высокую теплопроводность, малую вязкость, высокую температуру кипения; большой удельный вес, значения же теплоемкости ниже, но коррозионное воздействие на материал стенок каналов по которым они перемещаются, незначительное.

Расплавленные металлы применяются в тех случаях, когда необходимо обеспечить интенсивный отвод тепла от поверхности нагрева или когда при низком давлении требуется иметь высокую температуру рабочей жидкости.

Применение в качестве теплоносителя воды, имеющей высокий коэффициент теплоотдачи, приводит к тому, что для получения значительных температур рабочей жидкости необходимо существенно увеличивать давление. Газ может быть нагрет до высоких температур без повышения давления. Однако теплоотдача от стенки к газу очень мала, что приводит к возрастанию температуры поверхности нагрева. Газ как теплоноситель имеет существенный недостаток. Так как теплоемкость газа мала, из уравнения теплового баланса следует, что при съеме заданного количества тепла расходы газа должны, значительно возрасти. Следовательно, должны возрасти и гидравлические потери. Охлаждение жидкими металлами совмещает достоинства газового и водяного охлаждения при охлаждении теплонапряженных элементов энергетических установок, таких как камера горения, лопатки газовых турбин и др.

Жидкие металлы имеют высокую точку кипения, что позволяет повышать их температуру без применения высоко давления, им присущи также большие коэффициенты теплоотдачи.

Из всего сказанного следует, что исследование теплоотдачи в жидких металлах имеет не только теоретическое, но и большое практическое значение. С точки зрения теории жидкие металлы интересны как жидкости с очень малым числом Прандтля $Pr \ll 1$. В таких жидкостях молекулярный перенос теплоты происходит

значительно интенсивнее, чем молекулярный перенос количества движения; тепловой пограничный слой толще динамического.

В ламинарном потоке тепло поперек течения передается теплопроводностью, а в турбулентном – теплопроводностью и конвекцией.

В жидких металлах теплопроводность велика и может конкурировать с процессом турбулентного переноса. В этом случае распределение температур будет существенно зависеть от теплопроводности. Из рис. 1.15 следует, что жидкости с малыми числами Pr характеризуются равномерным переносом тепла по всему сечению трубы.

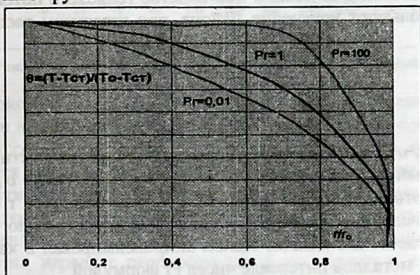


Рис. 1.15. Изменение температуры турбулентно текущей жидкости в поперечном сечении круглой трубы с радиусом r_0 при различных значениях числа Pr

Теплоотдача при течении жидких металлов изучалась различными исследователями как теоретически, так и экспериментально. Большое значение имеет теплоотдача при течении жидких металлов в трубах.

Исследования показали, что закон сопротивления при движении жидких металлов в гладких трубах остается таким же, как и для неметаллических жидкостей [4]. Благодаря высокой теплопроводности жидкого металла, при движении его в трубе, температура в пристенных слоях не может значительно отличаться от температуры в ядре потока и, следовательно, вблизи стенок не могут возникнуть слои с большой (малой) вязкостью по сравнению с ядром потока. И не может произойти искажения профиля скорости, поэтому тепловой поток не оказывает влияния на гидравлическое сопротивление.

В неметаллических жидкостях тепловой поток оказывает влияние на гидравлическое сопротивление.

При ламинарном режиме движений в круглых трубах, когда температура поверхности стенки остается постоянной, формулы для определения теплоотдачи были получены аналитически в следующем виде:

$$\text{при } Pe \, d / \ell > 12 \quad Nu = 1,61 (Pe \, d / \ell)^{1/3};$$

$$\text{при } Pe \, d / \ell < 12 \quad Nu = 3,66.$$

Для турбулентного режима течения в прямой круглой трубе, при расчете теплоотдачи при гидродинамически и термически стабилизированном течении и постоянстве теплового потока в стенку трубы, используют уравнение Лайона, при известном распределении скоростей:

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \int_0^R \frac{(W_x R d R)^2 dR}{\left(1 + \frac{\lambda_r}{\lambda}\right) R}, \quad (1.91)$$

где $W_x = v_x / v_{cp}$ - безразмерная скорость течения жидкости, $R = r / r_0$ - безразмерный радиус, здесь v_x - скорость потока, v_{cp} средняя скорость потока в данном сечении, r_0 - радиус трубы, r - текущий радиус. Численное решение уравнения (1.91) было получено Лайоном. Расчетные данные Лайон аппроксимировал в характерном для жидких металлов интервале чисел Pr формулой

$$Nu_d = 7 + 0,025 Pe_d^{0,5},$$

где $Pe_d = Re_d Pr = v \, d / a$ - число Пекле.

Исследования, проведенные с различными жидкими металлами [1-7] показали, что термическое контактное сопротивление - результат сложного процесса, обусловленное совокупностью физико-химических, гидродинамических и тепловых явлений у поверхности теплообмена. Наиболее вероятной причиной ухудшения теплоотдачи является образование прослойки дополнительной фазы (примеси окислы) на границе раздела: жидкий металл - стенка.

Теоретические формулы применимы для сравнительно чистых веществ, содержание примесей в которых сведено к минимуму. В основном, выполняются экспериментальные исследования теплоотдачи. На рис. 1.16 приведены данные экспериментальных работ из [4].

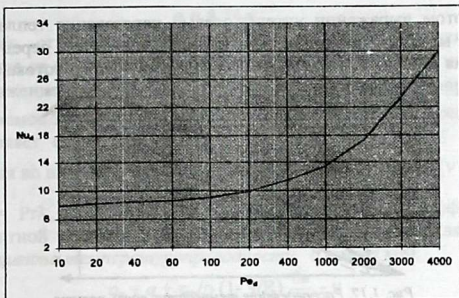


Рис. 1.16. Теплоотдача при течении жидких металлов в трубах.

Из рисунка следует, что при турбулентном течении жидкого металла не наблюдается резкого изменения в характере зависимости числа Нуссельта от числа Пекле. Такой характер зависимости объясняется тем, что при турбулентном течении жидкого металла, в особенности при малых Pe , большое значение имеет молекулярный перенос тепла (теплопроводность). Жидким металлам присуща высокая теплопроводность. Поэтому, при расчете средней по сечению температуры, наряду с переносом тепла по радиусу в ряде случаев необходимо учитывать и перенос тепла теплопроводностью вдоль оси.

На рис. 1.17 показан характер распределения температур при равномерном теплоотводе к стенке. Обогрев жидкости происходит на участке $0 - \ell$. Принято, что коэффициент теплоотдачи постоянен.

Пунктирная линия соответствует средней по сечению температуре жидкости, вычисленной по уравнению

$$T_{\text{ж}} = T'_{\text{ж}} + q_c F / (Gc_p),$$

где $G = \rho w f$ кг/сек, — массовый расход жидкого металла через поперечное сечение трубы с площадью поперечного сечения f , со скоростью w и плотностью ρ . При учете аксиальных перетечек тепла средняя по сечению температура жидкого металла в произвольном сечении x определяется уравнением

$$T_{\text{ж}} = T'_{\text{ж}} \pm q_c F / (Gc_p) \pm \lambda_{\text{ж}} \frac{dT_{\text{ж}}}{dx} f_{\text{ж}} \frac{1}{Gc_p} \pm \lambda_c \frac{dT_c}{dx} f_c \frac{1}{Gc_p}. \quad (1.92)$$

В этом выражении учтены осевые перетекания тепла, как по жидкому металлу, так и по стенке трубы. Выбор знака перед членами уравнения зависит от направления соответствующего потока тепла.

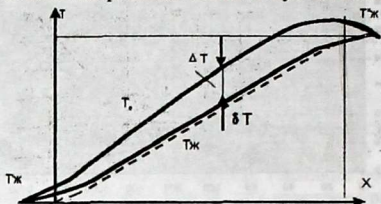


Рис. 1.17. Распределение температур вдоль потока.

В уравнении (1.92): $T_{ж}^0$ — температура жидкости перед началом обогрева; $\lambda_{ж}$ и $\lambda_{с}$ — коэффициенты теплопроводности соответственно жидкого металла и материала стенки; $f_{ж}$ и $f_{с}$ — площади поперечного сечения потока жидкого металла и стенки трубы.

На практике часто встречаются задачи, для которых характер течения может быть относительно просто определен экспериментально или теоретическим путем. К такому роду задач относятся рассмотренные в предыдущем параграфе примеры, в котором были представлены решения с помощью критериев подобия.

В то же время определение температурного поля в области со сложными краевыми условиями сопряжено со значительными трудностями.

Рассмотрим одну из задач теплообмена при стабилизированном течении жидкости в круглой трубе. Найдем температурное поле в канале круглого сечения при турбулентном течении жидкого натрия.

Уравнение распространения тепла для данной задачи имеет вид

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + u\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right).$$

Принимаются следующие исходные данные:

$$\text{Re}=10^4; \quad \alpha=0,673 \cdot 10^{-4}; \quad \nu=0,50 \cdot 10^{-6}; \quad \rho=904; \quad R=0,5 \cdot 10^{-2}; \\ c=1,34;$$

$$T(x,R)=0; \quad T(0,r)=1; \quad \frac{\partial^2 T(\infty, r)}{\partial x^2} = 0.$$

Профиль скоростей для принятого числа Рейнольдса вычисляется по степенному уравнению :

$$\varphi = 8,74 \eta^{1/7},$$

где $\varphi = u/v$, - относительная скорость потока, $\eta = v \cdot u / \nu$ относительное расстояние от стенки. Величина динамической скорости v , находится из выражения $v_* = \sqrt{\tau_{*} \rho}$, где τ_{*} - касательное напряжение, определяемое законом Блазиуса, $\tau = 0,316 \rho u_*^2 / 8Re^{0,25}$. Переменная y представляет собой расстояние от твердой стенки $0 \leq y \leq R$. Принимая во внимание соотношение [2] $\tau = \tau_{*} (1 - y/R)$; $\tau/\rho = (v + v_{\tau}) \frac{\partial u}{\partial y}$;

$\lambda / \lambda_{\tau} = Pr \lambda_{\tau} / \nu$; где λ_{τ} и ν_{τ} - соответственно коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности, выражение для расчета коэффициента температуропроводности a имеет вид:

$$a_p = a + \tau_{*} / \rho (1 - y/R) \frac{\partial u}{\partial y} - v.$$

1.7. Теплообмен излучением

Тепловое излучение представляет собой процесс распространения внутренней энергии излучающего тела путем электромагнитных волн. Электромагнитными волнами называют электромагнитные возмущения, исходящие от излучающего тела и распространяющиеся в вакууме со скоростью света, равной $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. При поглощении электромагнитных волн какими-либо другими телами они вновь превращаются в тепловую энергию. Возбудителями электромагнитных волн являются заряженные материальные частицы, т.е. электроны и ионы, входящие в состав вещества. При этом колебания ионов соответствуют излучению низкой частоты; излучение, обусловленное движением электронов может, иметь высокую частоту, если они входят в состав атомов и молекул и удерживаются около положения своего равновесия значительными силами. Таким образом, *радиационный теплообмен* связан с двойным преобразованием энергии и происходит в три этапа:

- первоначально внутренняя энергия тела превращается в энергию электромагнитного излучения (энергию фотонов или квантов);
- затем, лучистая энергия переносится электромагнитными волнами в пространстве, которые в однородной и изотропной среде и в вакууме распространяются прямолинейно со скоростью света подчиняясь оптическим законам преломления, поглощения и отражения;

• после переноса энергии электромагнитными волнами, происходит второй переход лучистой энергии во внутреннюю энергию тела путем поглощения фотонов.

В металлах многие электроны являются свободными. Поэтому здесь нельзя говорить о колебаниях около центров равновесия. Электроны движутся и при этом испытывают нерегулярное торможение. Вследствие этого излучение металлов приобретает характер импульсов и имеет волны различной частоты и том числе волны низкой частоты.

Помимо волновых свойств, излучение обладает также и корпускулярными свойствами, которые состоят в том, что лучистая энергия испускается и поглощается материальными телами не непрерывно, а отдельными дискретными порциями – квантами света или фотонами. Испускаемый фотон – частица материи, обладающая энергией, количеством движения и электромагнитной массой. Поэтому тепловое излучение можно рассматривать как фотонный газ.

Прохождение фотонов через вещество есть процесс поглощения и последующего испускания энергии фотонов атомами и молекулами этого вещества. Таким образом, излучение имеет двойственный характер, поскольку оно обладает свойствами непрерывного поля электромагнитных волн и свойствами дискретности, типичными для фотонов. Синтезом обоих свойств является представление, согласно которому энергия и импульс сосредоточиваются в фотонах, а вероятность нахождения их в том или ином месте пространства – в волнах. Соответственно это излучение характеризуется длиной волны λ или частотой колебаний $\nu = c/\lambda$. Все виды электромагнитного излучения имеют одинаковую природу и различаются лишь длиной волны (табл.2).

Классификация электромагнитного излучения в зависимости от длины волны

Вид излучения	Длина волны, мкм
Космические и гамма лучи	0,00001÷0,0001
Рентгеновское излучение	0,001÷0,02
Ультрафиолетовые лучи	0,02÷0,4
Видимые (световые) лучи	0,4÷0,76
Инфракрасные (тепловые) лучи	0,76÷400
Радио и электрические волны	400 и выше

Большинство твердых и жидких тел имеет сплошной спектр излучения, т. е. излучает энергию всех длин волн от нуля до бесконечности. К числу твердых тел, имеющих сплошной спектр

излучения, относятся диэлектрики, полупроводники и окислы металлов.

Некоторые тела излучают энергию только в определенных интервалах длин волн, т.е. испускают энергию прерывистым спектром. К ним относятся чистые металлы и газы, которые характеризуются селективным или выборочным излучением. Излучение различных тел различно. Оно зависит от природы тела, его температуры, состояния поверхности, а для газов – еще и от толщины слоя и давления.

Большинство встречающихся в природе и технике тел имеют значительную *поглощательную* и *излучательную способность*, поэтому в процессах лучистого теплообмена участвуют лишь *тонкие поверхностные слои*. Для проводников тепла толщина этих слоев имеет порядок 1 мкм, а для непроводников тепла – 1 мм. Поэтому применительно к твердым телам, а также к жидкостям тепловое излучение в ряде случаев приближенно можно рассматривать как поверхностное явление. Газообразные тела имеют значительно меньшее излучение, чем жидкие и твердые тела. Поэтому в излучении газов участвуют все его частицы, и процесс теплового излучения носит объемный характер.

Излучение всех тел зависит от температуры. С увеличением температуры излучение увеличивается, так как увеличивается внутренняя энергия тела. Изменение температуры тела вызывает не только изменение абсолютной величины интенсивности излучения, но сопровождается еще изменением спектрального состава или «цвета» излучения. С повышением температуры повышается интенсивность коротковолнового излучения и уменьшается интенсивность длинноволновой части спектра. Зависимость излучения от температуры значительно большая, чем процессов теплопроводности и конвекции. Поэтому при *низких температурах* преобладающую роль может играть теплообмен за счет *конвекции и теплопроводности*, а при *высоких* – основным видом переноса тепла может быть *тепловое излучение*.

Особенности радиационного теплообмена:

- все тела с температурой выше 0 К обладают собственным тепловым излучением, то есть энергию излучают все тела (твердые тела, жидкости и луче непрозрачные газы);
- для передачи теплоты излучением не требуется тело-посредник, т.е. лучистая энергия может передаваться и в вакууме;

- при температурах до 100°C лучистая и конвективная (при свободной конвекции) составляющие теплообмена имеют один порядок;

- различают поверхностное излучение (твердые тела) и объемное излучение (луче непрозрачные газы).

С точки зрения радиационного теплообмена различают два типа поверхностей: *диффузные* и *зеркальные* поверхности. *Диффузные* поверхности разлагают все падающее на них излучение в пределах полусферы. У *зеркальных* поверхностей угол падения луча равен углу его отражения.

При одной и той же температуре излучаемая энергия распределяется различно при различных длинах волн и для того, чтобы это учесть, вводят понятие о спектральной интенсивности излучения, представляющей собой лучистый поток в узком интервале длин волн и выражаемой уравнением

$$I = \frac{dE}{d\lambda}, \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \quad (1.93).$$

В расчетах теплообмена излучением используются следующие обозначения:

- $Q_{\text{пад}}$ и $E_{\text{пад}}$ поток и плотность потока излучения падающие на поверхность тела;
- $Q_{\text{отр}}$ и $E_{\text{отр}}$ поток и плотность потока излучения отраженные от поверхности тела;
- $Q_{\text{погл}}$ и $E_{\text{погл}}$ поток и плотность потока излучения поглощенные телом;
- $Q_{\text{проп}}$ и $E_{\text{проп}}$ поток и плотность потока излучения пропускаемые телом;
- $Q_{\text{соб}}$ и $E_{\text{соб}}$ поток и плотность потока собственного излучения тела;
- $Q_{\text{эф}}$ и $E_{\text{эф}}$ поток и плотность потока эффективного излучения тела;
- $Q_{\text{рез}}$ и $E_{\text{рез}}$ поток и плотность потока результирующего излучения тела.

На рис. 1.18 представлено полупрозрачное тело, на поверхность которого падает поток излучения $Q_{\text{пад}}$. Для любого полупрозрачного тела из закона сохранения энергии следует

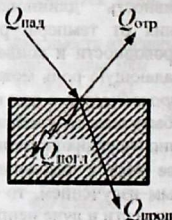


Рис. 1.18. Схема радиационного теплообмена для полупрозрачного тела.

$$Q_{\text{погл}} + Q_{\text{отр}} + Q_{\text{проп}} = Q_{\text{пад}}. \quad (1.94)$$

Разделив левую и правую части равенства (1.94) на поток падающего излучения, получим

$$\frac{Q_{\text{погл}}}{Q_{\text{пад}}} + \frac{Q_{\text{отр}}}{Q_{\text{пад}}} + \frac{Q_{\text{проп}}}{Q_{\text{пад}}} = \frac{Q_{\text{пад}}}{Q_{\text{пад}}},$$

или $A + R + D = 1$,

где $A = Q_{\text{погл}} / Q_{\text{пад}}$ – поглощательная способность тела, равная доле падающего излучения поглощенного телом;

$R = Q_{\text{отр}} / Q_{\text{пад}}$ – отражательная способность тела, равная доле падающего излучения, отраженного телом;

$D = Q_{\text{проп}} / Q_{\text{пад}}$ – пропускательная способность тела, равная доле падающего излучения, проходящего через тело.

В зависимости от числового значения A , R и D различают абсолютно черное, абсолютно белое и лучепрозрачное (диатермичное) тела.

Тело, которое поглощает все падающее на него излучение, называют абсолютно черным телом (АЧТ). Поток и плотность потока собственного излучения АЧТ обозначают Q_0 и E_0 соответственно.

У абсолютно черного тела: $A = 1$, $R = D = 0$.

Тело, которое диффузно отражает все падающее на него излучение называют абсолютно белым телом.

У абсолютно белого тела: $R = 1$, $A = D = 0$.

Тело, которое пропускает все падающее на него излучение, называют лучепрозрачным или диатермичным.

Для диатермичного тела: $D = 1$, $A = R = 0$.

Некоторые реальные тела по своим радиационным свойствам близки к идеальным. Например, у сажи и окисленной шероховатой стали $A \rightarrow 1$, у полированных металлов $R \rightarrow 1$, у двухатомных газов с симметричными молекулами (N_2 , O_2), в том числе, и у сухого воздуха $D \rightarrow 1$.

У непрозрачных тел: $D = 0$, $A + R = 1$.

У газов: $R = 0$, $A + D = 1$.

1.7.1. Виды лучистых потоков

Собственным излучением тела называют излучение, обусловленное его тепловым состоянием (степенью нагретости). Поток собственного излучения обозначают $Q_{\text{соб}}$ или Q .

Плотность потока собственного излучения обозначают

$$E_{\text{соб}} = \frac{dQ_{\text{соб}}}{dF} \quad \text{или} \quad E = \frac{dQ}{dF}, \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

и называют *лучеиспускательной способностью* тела. В величине $E_{\text{соб}}$ заключена вся энергия, излучаемая телом в диапазоне длин волн $\lambda = 0 \div \infty$, т.е. энергия излучения всего спектра.

Рассмотрим схему на рис. 1.19 радиационного теплообмена для непрозрачного тела. На тело падает лучистый поток $Q_{\text{пад}}$. Одна часть теплового потока в количестве $Q_{\text{погл}}$ поглощается телом, а другая — в количестве $Q_{\text{отр}}$ телом отражается. Тело обладает и собственным излучением $Q_{\text{соб}}$ или Q .

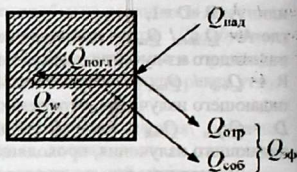


Рис.1.19. Схема радиационного теплообмена для непрозрачного тела.

Радиационный тепловой поток, уходящий с поверхности тела, равный сумме собственного и отраженного тепловых потоков называют *эффективным* тепловым потоком и обозначают $Q_{\text{эф}}$. Эффективный тепловой поток по определению равен:

$$Q_{\text{эф}} = Q_{\text{соб}} + Q_{\text{отр}}. \quad (1.95)$$

Тепловой поток, идущий на изменение теплового состояния тела, называют *результатирующим* тепловым потоком и обозначают $Q_{\text{рез}}$ или Q_w . В результате радиационного теплообмена тело получает или отдает количество энергии (см. рис. 1.19):

$$Q_w \equiv Q_{\text{рез}} = Q_{\text{погл}} - Q_{\text{соб}} = A \cdot Q_{\text{пад}} - Q_{\text{соб}}. \quad (1.96)$$

Если расчет радиационного теплообмена проводят, используя плотности соответствующих радиационных потоков, то в этом случае формулы (1.95), (1.96) примут вид:

$$E_{\text{эф}} = E_{\text{соб}} + E_{\text{отр}}.$$

$$q_w \equiv E_{\text{рез}} = E_{\text{погл}} - E_{\text{соб}} = A \cdot E_{\text{пад}} - E_{\text{соб}}.$$

Связь собственного, результирующего и эффективного потоков излучения выражается в виде:

$$Q_{\text{эф}} = \frac{1-A}{A} \cdot Q_w + \frac{Q_{\text{соб}}}{A} \quad \text{или} \quad E_{\text{эф}} = \frac{1-A}{A} \cdot q_w + \frac{E_{\text{соб}}}{A}.$$

Для черного тела $A = 1$ и $E_{\text{эф}} = E_{\text{соб}}$, т.е. эффективное излучение вырождается в собственное.

Поверхностные плотности всех видов излучения, кроме собственного, являются линейными функциями падающего излучения. Собственное излучение объединяется и увязывается с другими его видами через эффективное излучение.

1.7.2. Законы теплового излучения

Законы, описывающие излучение абсолютно черного тела, являются наиболее простыми и строгими. Эти законы с соответствующими поправками используются для получения расчетных формул теплообмена излучением между реальными телами.

Закон Планка. Испускание энергии по длинам волн происходит неравномерно и зависит от температуры. Зависимость спектральной плотности потока излучения от длины волны и температуры устанавливается законом Планка:

$$E_{0\lambda} = \frac{2\pi c_1}{\lambda^5} \left[e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right]^{-1}, \quad (1.97)$$

где λ — длина волны, м; $c_1 = 5,944 \cdot 10^{-17}$ — первая константа излучения, Вт·м²; $c_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2}$ — вторая константа излучения, м·К; T — температура тела, К; $E_{0\lambda}$ измеряется в Вт/м³.

Закон Планка получен теоретическим путем. Согласно этому закону каждой длине волны соответствует свое значение $E_{0\lambda}$ (рис. 1.20).

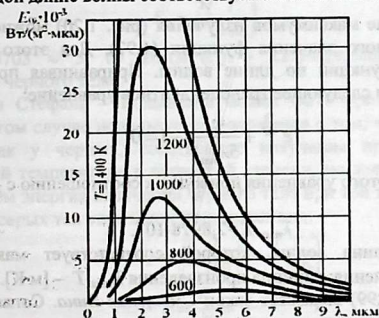


Рис. 1.20. Закон Планка в графическом представлении.

Плотность потока излучения, характеризующаяся отдельными изотермами, проходит через максимум. При $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$, она стремится к нулю.

Поскольку закон Планка получен для абсолютно черного тела, то по отношению к нечерным телам он выражает максимально возможную плотность потока излучения. Для нечерных тел

спектральный состав излучения кроме длины волны зависит от их физических свойств и определяется экспериментально.

Закон Релея – Джинса. Закон Планка имеет два предельных случая. К одному из них относится случай, когда произведение λT велико по сравнению с постоянной c_2 . При этом можно ограничиться двумя слагаемыми разложения экспоненциальной функции (1.98) в ряд по степеням $c_2 / \lambda T$:

$$e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{c_2}{\lambda T} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{c_2}{\lambda T} \right)^2 + \dots \quad (1.98)$$

Пренебрегая членами ряда высшего порядка вместо (1.98) получаем соотношение, выражающее закон Релея – Джинса:

$$E_{0\lambda} = \frac{2c_1 \pi T}{c_2 \lambda^4}.$$

Закон смещения Вина. Второй предельный случай соответствует малому значению произведения T по сравнению с постоянной c_2 . Тогда в (1.97) можно пренебречь единицей и она переходит в зависимость, выражающую закон Вина (1893 г.)

$$E_{0\lambda} = \frac{2\pi c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$$

Положение максимумов излучения (рис. 1.20) можно получить из экстремального значения функции (1.97). Для этого находится производная функции по длине волны. Приравнивая производную нулю, получаем следующее трансцендентное уравнение:

$$e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} + \frac{c_2}{5\lambda_{\max} T} - 1 = 0.$$

Решение этого уравнения приводит к соотношению $c_2 / \lambda_{\max} T = 4,965$, откуда

$$\lambda_{\max} T = 2,8978 \cdot 10^{-3}. \quad (1.99)$$

где λ_{\max} – длина волны, которой соответствует максимальная плотность излучения; единица произведения $\lambda_{\max} T$ – [м·К].

Зависимость (1.99) выражает закон *Смещения Вина*. Согласно этому закону максимальное значение спектральной плотности потока излучения с повышением температуры сдвигается в сторону более коротких волн. Значение максимальной плотности потока излучения черного тела может быть найдено из закона Планка (1.97), если положить $\lambda = \lambda_{\max}$ и использовать зависимость (1.99):

$$E_{0\lambda} = c_3 T^5 \quad (1.100)$$

где $c_3 = 1,307 \text{ Вт} / (\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$.

Из (1.100) следует, что максимальная плотность излучения пропорциональна абсолютной температуре тела в пятой степени.

Закон Стефана – Больцмана устанавливает зависимость плотности потока излучения от температуры. Эта зависимость задолго до появления квантовой теории Планка впервые экспериментально (путем измерений собственного излучения модели черного тела) была установлена Стефаном (1879 г.). Позднее (1884 г.) она теоретически (исходя из законов термодинамики) была получена Больцманом. Поэтому закон получил объединенное название Стефана – Больцмана. Закон Стефана – Больцмана может быть получен и при использовании закона Планка. Закон Стефана – Больцмана для поверхностной плотности потока интегрального излучения E_0 , Вт/м², выражается следующим соотношением:

$$E_0 = \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda = \sigma_0 T^4.$$

где $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$, Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана – Больцмана.

Для удобства практических расчетов последняя зависимость представляется в виде

$$E_0 = c_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4,$$

где $c_0 = 5,6703 \approx 5,67$ Вт/(м²·К⁴) – излучательная способность абсолютно черного тела.

Закон Стефана – Больцмана может быть применен к серым телам. В этом случае используется положение о том, что у серых тел, так же как у черных, собственное излучение пропорционально абсолютной температуре в четвертой степени, но энергия излучения меньше, чем энергия излучения черного тела при той же температуре. Тогда для серых тел этот закон принимает вид:

$$E = \varepsilon E_0 = \varepsilon c_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4 = c \left(\frac{T}{100} \right)^4$$

где $\varepsilon = \frac{E_0}{E} = \frac{c}{c_0}$ (1.101)

представляет собой коэффициент теплового излучения; c – излучательная способность серого тела. Таким образом, коэффициентом теплового излучения называют отношение поверхностной плотности потока собственного интегрального излучения к его величине для абсолютно черного тела при той же температуре.

Коэффициент ϵ изменяется в пределах от 0 до 1 и для каждой длины волны λ характеризует долю, которую E данного тела составляет от E_0 абсолютно черного тела при одной и той же температуре. Из определения величины ϵ следует, что спектральная степень черноты абсолютно черного тела равна единице.

Спектральная степень черноты реального непрозрачного тела зависит от длины волны, природы тела, состояния его поверхности и температуры.

Закон Кирхгофа. Абсолютно черное тело поглощает все падающее на него излучение ($A = 1$) и является идеальным излучателем у которого $\epsilon = 1$. Для реальных тел существование однозначной связи между излучательной способностью E и его поглощательной способностью A , установил немецкий физик Кирхгоф в 1859 году. Согласно закону Кирхгофа отношение спектральной плотности потока собственного излучения (спектральной лучеиспускательной способности) любого тела к его спектральной поглощательной способности есть величина постоянная и равная спектральной плотности потока АЧТ, имеющего ту же температуру:

$$\frac{E}{A} = E_0 \quad (1.102)$$

Сравнение выражений (1.101) и (1.102) приводит к выводу о том, что спектральная поглощательная способность равна спектральной степени черноты: $A = \epsilon$. Равенство (1.102) является следствием из закона Кирхгофа и строго справедливо при локальном термодинамическом равновесии между излучением и веществом, что на практике не выполняется.

Тела, поглощательные способности которых не зависят от длины волны и направления падающего луча, принято называть *серыми*. В этом случае интегральная и монохроматическая излучательные способности тождественно равны: $A = A_\lambda$.

Большое количество технических материалов близко по оптическим свойствам к серым телам. Это твердые тела, имеющие шероховатые или окисленные поверхности со сравнительно высокой поглощательной способностью. Поверхностные эффекты существенно искажают и тем самым затрудняют исследование оптических свойств, связанных с природой излучающего тела. В связи с этим оптические свойства определяются для тел с абсолютно гладкими поверхностями.

1.7.3. Излучение газов и паров.

Излучение газов

Излучение газов сильно отличается от излучения твердых тел. Одноатомные и двухатомные газы обладают ничтожно малой излучательной и поглощательной способностью. Эти газы считаются прозрачными для тепловых лучей. Трехатомные (CO_2 , H_2O и д. р.) и многоатомные газы уже обладают значительной излучательной, а следовательно, и поглощательной способностью. При высокой температуре излучение трехатомных газов, образующихся при сгорании топлив, имеет большое значение для работы теплообменных устройств. Спектры излучения трехатомных газов в отличие от излучения серых тел имеют резко выраженный селективный (избирательный) характер. Эти газы поглощают и излучают энергию только в определенных интервалах длин волн, расположенных в различных частях спектра (рис. 1.16). Для лучей с другими длинами волн эти газы прозрачны.

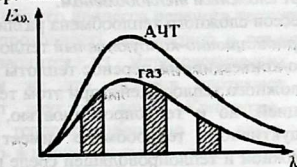


Рис. 1.21. Спектры излучения.

Когда луч встречается на своем пути слой газа, способного к поглощению луча с данной длиной волны, то этот луч частично поглощается, частично проходит через толщу газа и выходит с другой стороны газа с интенсивностью меньшей, чем при входе. Слой очень большой толщины может практически поглотить луч целиком. Кроме того, поглощательная способность газа зависит от его парциального давления или числа молекул и температуры. Таким образом, коэффициент поглощения газа может быть определен следующей зависимостью:

$$A = f(T_f, P_n),$$

где T_f — температура газа; P_n — парциальное давление.

Излучение и поглощение энергии в газах происходит по всему объему. Различают несветящиеся и светящиеся газовые среды. Свечение газовой среды обуславливается наличием в ней

раскаленных частиц сажи, угля, золы. Такое светящееся пламя называют *факелом*.

Излучение факела определяется главным образом излучением содержащихся в нем твердых частиц. Присутствие в газовой среде значительного количества мелких взвешенных твердых частиц делает эту среду мутной.

К мутным средам кроме сажистого светящегося пламени можно отнести и другие запыленные потоки, например пылевые облака, туманы. Мутные среды характеризуются существенным рассеиванием лучистой энергии.

Сложный теплообмен

Лучистый перенос может сопровождаться одновременным переносом теплоты путем теплопроводности и конвекции. Совместный (комбинированный) процесс лучистого теплообмена и процесса теплопроводности или конвекции, а также всех трех видов переноса называют *сложным теплообменом*.

Среди процессов сложного теплообмена различают *радиационно-конвективный* и *радиационно-кондуктивный* теплообмен.

Радиационно-конвективный перенос теплоты является наиболее общим случаем сложного теплообмена; при этом теплота переносится не только радиацией, но и теплопроводностью, и конвекцией. В радиационно-кондуктивном теплообмене имеет место перенос теплоты в неподвижной и теплопроводящей среде путем излучения и теплопроводности.

Сложный теплообмен описывается системой уравнений, состоящей из уравнений энергии, движения и неразрывности (сплошности), к которым добавляются условия однозначности. Для модели сплошной среды уравнения сохранения массы и количества движения остаются неизменными. Уравнение энергии применительно к радиационно-конвективному стационарному теплообмену в однокомпонентной несжимаемой жидкости, поглощающей, испускающей и рассеивающей энергию излучения, имеет вид:

$$\operatorname{div} \vec{q}_T + \operatorname{div} \vec{q}_k + \operatorname{div} \vec{q}_{\text{рад}} = 0 \quad (1.103)$$

где q_T , q_k , $q_{\text{рад}}$ — соответственно векторы плотности теплового потока за счет теплопроводности, конвекции и излучения (радиации).

В общем случае эти величины изменяются в рассматриваемом пространстве. В уравнении (1.103) не учитываются возможные внутренние источники, теплоты и диссипация механической энергии.

Граничные условия задаются различно в зависимости от постановки задачи. Различным образом могут быть заданы физические и оптические параметры среды и граничной поверхности.

Задачи о совместном переносе энергии путем теплопроводности и излучения в общем случае являются весьма сложными, поэтому они решаются численными или приближенными методами.

При отсутствии конвекции зависимость (1.103) с учетом того, что согласно закону Фурье $q_T = -\lambda \text{grad } T$, принимает вид:

$$\text{div}(\lambda \text{grad } T) = \text{div } q_{\text{рад}}.$$

Для одномерной и плоской задачи это соотношение переходит в зависимость

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{dq_{\text{рад}}}{dx}$$

что эквивалентно равенству

$$-\lambda \frac{dT}{dx} + q_{\text{рад}} = \text{const}$$

Разделение общего процесса переноса теплоты на элементарные явления — теплопроводность, конвекцию и тепловое излучение — в основном производится из методологических соображений. В действительности же эти явления протекают одновременно и, конечно, влияют друг на друга. Конвекция, например, всегда сопровождается теплопроводностью и часто лучеиспусканием; теплопроводность в пористых телах — конвекцией и лучеиспусканием в порах, а лучеиспускание — теплопроводностью и конвекцией.

В практических расчетах разделение таких сложных процессов на элементарные явления не всегда возможно и целесообразно. Обычно результат одновременного действия отдельных элементарных явлений приписывается одному из них, которое и считается главным. Влияние же остальных (второстепенных) явлений сказывается лишь на величине количественной характеристике основного. Так, например, при распространении тепла в пористом теле в качестве основного явления считается теплопроводность, а влияние конвекции и лучеиспускания в порах учитывается соответственным увеличением значения коэффициента теплопроводности. Точно так же при расчете распространения тепла в покоящейся жидкости основным считается явление теплопроводности, а влияние естественной конвекции учитывается особым коэффициентом конвекции. Процесс теплообмена между стенкой и омывающим ее газом также является результатом совокупного действия конвекции, теплопроводности и

лучеиспускания. В этом случае количественной характеристикой процесса является коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \alpha_k + \alpha_{\text{рад}}$$

где α_k учитывает действие конвекции и теплопроводности, $\alpha_{\text{рад}}$ — действие лучеиспускания.

Если T_f — температура газа и его оболочки, а T_w — температура теплопроводящей стенки, то каждой единице поверхности этой стенки передается тепло путем соприкосновения:

$$q_k = \alpha_k (T_f - T_w) \quad (a)$$

путем лучеиспускания

$$q_{\text{рад}} = \varepsilon_{\text{пр}} c_0 \left[\left(\frac{T_f}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right] \quad (б)$$

Суммируя (a) и (б) можно получить

$$q = q_k + q_{\text{рад}} = \alpha_k (T_f - T_w) + \varepsilon_{\text{пр}} c_0 \left[\left(\frac{T_f}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right] \quad (в)$$

Вынесем разность $T_f - T_w$ в уравнении (в) за скобки, получим

$$q = (T_f - T_w) \left\{ \alpha_k + \varepsilon_{\text{пр}} c_0 \left[\frac{\left(\frac{T_f}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_w}{100} \right)^4}{(T_f - T_w)} \right] \right\} \quad (г)$$

далее, можно записать

$$q = (\alpha_k + \alpha_{\text{рад}}) (T_f - T_w) = \alpha (T_f - T_w)$$

где α_k — коэффициент теплоотдачи соприкосновением; $\alpha_{\text{рад}}$ — коэффициент теплоотдачи лучеиспусканием;

$$\alpha_{\text{рад}} = \frac{\varepsilon_{\text{пр}} c_0 \left[\left(\frac{T_f}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right]}{(T_f - T_w)}$$

$\alpha = \alpha_k + \alpha_{\text{рад}}$ — общий (суммарный) коэффициент теплоотдачи;

$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon_f} + \frac{1}{\varepsilon_w} - 1 \right)}$ — приведенная степень черноты системы;

ε_f — степень черноты газа;

ε_w — степень черноты стенки.

Из уравнения (г) следует, что при высоких температурах поверхности и газа, наибольший вклад в значение теплового потока вносит теплообмен излучением.

Критерии радиационного подобия. Числа (критерии) радиационного подобия получают путем приведения уравнений лучистого и сложного теплообмена, а также условий однозначности к безразмерному виду.

Критерии – безразмерные комплексы, характеризующие вклад различных видов процессов переноса. К таким комплексам относятся числа Больцмана (Bo) и Кирпичева (Ki), выражаемые соответственно соотношениями

$$Bo = \frac{\rho c_p \nu}{\sigma_0 T^3}; \quad Ki = \frac{\sigma_0 T^3}{\lambda k}$$

Число Bo характеризует радиационно-конвективный теплообмен; чем меньше его значение, тем большую роль играет лучистый перенос в среде по сравнению с конвективным. Число Ki характеризует радиационно - кондуктивный перенос; λ и k – коэффициенты теплопроводности и ослабления среды. Значение k определяется по справочным таблицам.

Контрольные вопросы к главе 1

1. Что такое процесс теплообмена?
2. Какие виды теплообмена различают?
3. Назовите простые виды переноса тепла.
4. В какой среде наблюдается явление теплопроводности?
5. Какой процесс называют конвективным теплообменом?
6. Сформулируйте основной закон теплоотдачи.
7. Каким образом осуществляется конвективный перенос тепла?
8. Что называют температурным полем тела (или системы тел)?
9. Что понимают под градиентом температур?
10. Приведите одну из формулировок основного закона теплопроводности (закона Фурье).
11. В каких единицах измеряют плотность теплового потока?
12. Определение коэффициента теплопроводности, в каких единицах он измеряется?
13. Какой вид имеет закон Фурье для пластины?
14. Что характеризует теплоемкость?
15. Критерии Нуссельта, Грасгофа, Прандтля, их физический смысл?

ГЛАВА 2. КОНЦЕНТРИРОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ ЭНЕРГИИ И МОДЕЛИ ИХ РАСЧЕТА

Концентрированные потоки энергии, КПЭ — это средства, применяемые для термического воздействия на материалы, в целях проведения технологических операций сварки, термической обработки, резки, скрайбирования, размерной обработки, маркирования, напыления, наплавки и т.д. К числу таких средств относят газовое пламя, электрический разряд, электрическую дугу, пучок электронов, световой луч, поток ионов и т.д. Также существует понятие источников КПЭ. К ним относятся лазеры, плазмотроны, электронно-лучевые установки и т.д.

В рамках данного учебного пособия рассмотрены электрическая дуга и лазерное излучение.

2.1. Электрическая дуга

Электрической дугой называют форму электрического разряда, которая возникает при больших плотностях тока и отличается низким прикатодным падением потенциал. Электрическая дуга генерируется в специальном устройстве — плазмотроне, состоящем из двух основных элементов — электрода и формирующего сопла, через канал которого проходит столб электрической дуги с рабочим — плазмообразующим газом, подаваемым в него под определенным давлением (рис. 2.1.). При нагревании газа электрической дугой образуется плазменный поток². Под воздействием стенок канала сопла и струи плазмообразующего газа столб дуги сжимается, его поперечное сечение уменьшается, вследствие чего температура плазмы в центральной части столба дуги повышается. Принцип действия дуговых плазмотронов одинаков, вне зависимости от их конструкций и основан на принудительном охлаждении и сжатии

² Плазма — это четвертое, наиболее распространенное в природе состояние вещества, представляющее собой ионизированный газ, который содержит электроны, положительно заряженные ионы, нейтральные и возбужденные атомы и молекулы. Солнце и звезды являются сгустками плазмы. Внешняя поверхность земной атмосферы покрыта плазменной оболочкой — ионосферой. В природных условиях плазма наблюдается при темных, тлеющих и дуговых (молнии) разрядах в газах. Плазма используется в светотехнике (неоновых лампах, лампах дневного света, электродуговых устройствах), а также при электросварке, плазменной резке, плазменной наплавке и в других технологических процессах. Плазменные потоки используются для изучения движения тел при входе в атмосферу Земли и других планет, для получения химических веществ, которые в обычных условиях получить невозможно. Различают два рода плазмы: изотермическую, возникающую при нагревании газа до температуры достаточно высокой, чтобы протекала термическая ионизация газа, и газоразрядную, образующуюся при электрических разрядах в газах. [9].

столба дуги газом, в некоторых случаях жидкостью (водяная стабилизация) [9-20].

В зависимости от форм электрического разряда, реализуемого в генераторе для получения плазмы, различают электродуговые, высокочастотные и сверхвысокочастотные плазмотроны, а также генераторы на электромагнитных колебаниях оптического диапазона частот – оптических разрядах и потоках частиц высоких энергий – пучковый разряд. В настоящее время наибольшее распространение и применение получили электродуговые генераторы плазмы – электродуговые плазмотроны.

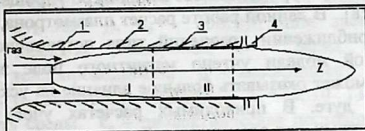


Рис. 2.1. Схема электродугового плазмотрона постоянного тока с фиксированной длиной дуги, стабилизированной вихревым потоком плазмообразующего газа: 1, 4 – электроды дуги; 2 – труба; 3 – дуга; I – область впуска, II – полностью развитое течение.

Электрическая дуга горит в канале, по которой в аксиальном направлении течет газ. Нагретый газ выходит из канала в виде струи плазмы.

В настоящее время плазмотроны постоянного тока находят широкое применение в различных областях науки и техники [9,14,18, 20,21]. В первую очередь следует указать на их использование в качестве корректирующих космических двигателей. Не менее важно их использование в аэродинамических трубах для имитации вхождения космических летательных аппаратов в атмосферу планеты со скоростями, которые могут значительно превышать скорость звука. Плазмотроны нашли применение в плазмохимии, плазменной металлургии, при резке и сварке металлов и неметаллов, нанесения покрытий, в спектроскопических исследованиях и спектральном анализе.

При достаточно длинном канале в плазмотроне можно выделить область впуска и область полностью развитого течения. В последней физические величины не изменяются в аксиальном направлении, динамические величины в первом приближении не оказывают влияния на термические и электрические свойства дуги. Для области полностью развитого течения характерно то, что вся выделяющаяся здесь электрическая энергия отдается стенке канала. Течение газа в

этой области является неизотермическим аналогом течения Хагена – Пуазейля и подробно исследовано в [22-24]. В области впуска физические величины зависят от радиальной и аксиальной координат, и именно здесь текущий газ нагревается электрической дугой. В этой области имеется сильная взаимосвязь между электрическими, термическими и газодинамическими величинами, что существенно усложняет расчет. В связи с этим при расчете области впуска плазматрона обычно исходят из упрощенных модельных представлений, которые позволяют получить достаточно простое численное [25] или даже аналитическое [26] решение.

Полная система уравнений без каких-либо упрощений решалась в работах [27,28]. В данной работе расчет плазматрона, как и [29-31] проведен в приближении уравнений типа пограничного слоя. В рассматриваемой модели учтено магнитное поле электрической дуги, которое может оказывать большое влияние на ускорение газа в электрической дуге. В приводимых расчетах учет ускоряющего действия магнитных сил электрической дуги в рамках сравнительно простой, но достаточно надежной расчетной схемы, с корректной постановкой входных условий. При этом рассчитывается вклад приэлектродной области электрической дуги в нагрев и течение газа.

Система уравнений для электродуговой плазмы записывается с учетом основных факторов, имеющих наиболее существенное влияние на ее формирование: джоулево тепло, потоки тепла, кондуктивную теплопроводность, вязкое трение и ускорение газа собственным магнитным полем и в векторном виде записывается следующим образом [25, 28, 29]:

уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot (\rho V) = 0; \quad (2.1)$$

уравнения движения

$$\rho(V \cdot \nabla)V = -(\rho - \rho_w)g + E \nabla \cdot D + j \times B - \nabla(P + 2/3 \mu \nabla \cdot V) + 2 \nabla \cdot (\mu \dot{S}); \quad (2.2)$$

уравнения энергии

$$\rho V \cdot \nabla (C_p T + V^2/2) = j \cdot E - \nabla \cdot (2 \mu V \cdot \dot{S} - 2/3 \mu V \nabla \cdot V + \mathcal{N}(C_p T)) - \psi \quad (2.3)$$

уравнения Максвелла в виде

$$\nabla \times E = 0; \quad (2.4)$$

$$\nabla \times H = j; \quad (2.5)$$

$$\nabla \times B = 0; \quad (2.6)$$

закона Ома

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} / \sigma + \frac{1}{en_e} [\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e]. \quad (2.7)$$

Дополнительные соотношения

$$\rho = \rho(T, p), \quad \sigma = \sigma(T, p), \quad \lambda = \lambda(T, p), \quad \mu = \mu(T, p), \quad \psi = \psi(T, p), \quad c_p = c_p(T, p), \\ \mathbf{V} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (2.8)$$

Здесь ρ - плотность, ρ_∞ - плотность окружающей среды, \mathbf{V} - вектор скорости, \mathbf{g} - вектор ускорения свободного падения, \mathbf{E} - напряженность электрического поля, \mathbf{D} - электрическое смещение, \mathbf{B} - магнитная индукция, \mathbf{j} - плотность электрического тока, P - давление, \dot{S} - тензор скоростей деформации с компонентами $(S_{ik} = 1/2(\partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i))$, n_e - концентрация электронов, p_e - парциальное давление электронов, e - заряд электрона, λ - коэффициент теплопроводности, μ - коэффициент вязкости, c_p - теплоемкость, σ - электропроводность, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная проницаемость среды, ϵ_0 - диэлектрическая постоянная среды, ψ - излучательная способность.

С помощью сравнительной оценки отношений одних составляющих уравнений к другим выполняют упрощение системы уравнений (2.1-2.8). Оценка позволяет пренебречь действиями электростатической силы и индуцированного электрического поля, силы тяжести, ввиду их достаточной малости [28]. Выбор преимущественного направления изменения параметров среды и системы координат (цилиндрической), совпадающей с осью симметрии дуги позволяет провести дальнейшее упрощение системы уравнений.

2.1.1. Расчетная модель плазматрона. Постановка задачи.

Основные уравнения.

Независимо от конкретной конструкции генераторов плазменного потока (плазматронов) в большинстве из них газ движется в трубе, поперечные размеры которой много меньше продольного размера. Ток, протекающий между электродами, разогревает плазму, часть энергии идет на увеличение скорости потока, а часть вследствие теплопроводности и излучения передается стенкам плазматрона. Давление газа на входе разгонного участка порядка атмосферного (или больше), так что время установления локального термодинамического равновесия много меньше характерного гидродинамического времени. Предполагается также выполнение условия квазинейтральности.

Согласно сказанному выше движение газа внутри плазматрона может быть описано уравнениями магнитной газодинамики с учетом вязкости, тепло- и электропроводности газа.

Рассматриваемая система состоит из уравнений Навье - Стокса

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = - \frac{\Delta P}{\rho} + \vec{F}_M + \vec{F}_B, \quad (2.9)$$

здесь \vec{V} - массовая скорость газа, P - давление, ρ - плотность, \vec{F}_M - Лоренцева сила.

$$\vec{F}_M = \frac{1}{c} [\vec{j} \vec{H}]. \quad (2.10)$$

Эти соотношения дают простейшую форму связи между плотностью тока и напряженностью электрического поля. Все эти уравнения написаны в цилиндрической системе координат. Здесь z, r, φ - цилиндрические координаты. Где P - давление, ρ - плотность, T - температуры газа, v и u - компоненты скорости в радиальном и аксиальном направлении, H_φ - напряженность собственного магнитного поля в азимутальном направлении, σ, λ, μ - есть соответственно электропроводности, теплопроводности и вязкости, ψ - излучательная способность, C_p - теплоемкость при постоянном давлении, μ_0 - абсолютная магнитная проницаемость. Магнитная проницаемость для плазмы может быть принята, как и для вакуума в единицах СИ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

2.1.2. Граничные условия

Расчет плазматрона предполагает совместное решение уравнений энергии, движения, непрерывности, уравнений Максвелла и закона Ома. При решении указанной системы уравнений необходимо задать граничные (краевые) условия, т.е. условия у стенки канала и на входе в расчетный участок дуги. Задание условий у стенки ($r=R$) не представляет труда: здесь можно положить скорость газа равной нулю из-за вязкости; температуру газа - равной известной температуре стенки и плотность электрического тока - равной нулю вследствие низкой температуры газа. Условия на входе в дугу задать значительно сложнее. Для этого требуется знание о поведении плазмы вблизи поверхности электрода, что само по себе представляет весьма сложную задачу. Постановка граничных условий без какого-либо строго обоснования делает иллюзорным точность расчета и преимущества детального рассмотрения по сравнению с грубыми модельными оценками. Например, в работах начало расчетного

участка дуги располагается на некотором расстоянии от электрода, чтобы влиянием электрода, чтобы влиянием электрода на течение газа можно было пренебречь. При этом в некоторых случаях принимается, что массовая скорость постоянна по сечению трубы, а столб дуги при $z=0$ имеет цилиндрическую симметрию. Последнее позволяет найти распределение температуры и напряженность электрического поля при $z=0$ как для цилиндрической дуги. Постоянство массовой скорости по сечению дуги предполагается и в работе для расчета свободно горящей дуги с аксиальным потоком газа. В работах задаются распределения температуры и скорости на входе в расчетный участок дуги. В некоторых случаях для $z=0$ и радиуса токопроводящей зоны равной 0,55 радиуса канала принимают параболический профиль плотности тока.

Входные условия могут быть заданы достаточно корректно, если начало расчетного участка дуги расположить на расстоянии от поверхности электрода, примерно равном толщине пограничного слоя, и привлечь в качестве эмпирического параметра диаметр столба дуги у поверхности электрода.

Рассмотрим особенности столба электрической дуги у поверхности электрода. Полагается, что на некотором расстоянии $z=\delta$ от поверхности электрода имеется сечение с экстремальной температурой газа (рис.2.2). Действительно в соответствии с принципом минимума энергетических потерь, столб дуги сужается у поверхности электрода, что приводит к повышению температуры газа. С другой стороны существует отвод тепла дуги к сравнительно холодному электроду. Действие обоих факторов обуславливает появление максимума в аксиальном распределении температуры газа.

В сечении дуги $z = \delta \frac{\partial T}{\partial z} = 0$ и, следовательно, аксиальные потоки тепла отсутствуют. Таким образом, это сечение можно рассматривать как цилиндрический участок столба дуги.

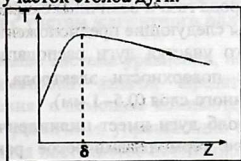


Рис. 2.2. Предполагаемое аксиальное распределение температуры у поверхности электрода.

Величина δ примерна равна толщине теплового пограничного слоя. По данным работы [13], толщина теплового пограничного слоя у поверхности электрода дуги составляет около 1 мм и значительно превышает толщину зоны, в которой может нарушаться локальное термодинамическое равновесие. Наличие вязкости газа и застойной зоны течения у поверхности электрода позволяет также полагать, что скорость газа в сечении $z=\delta$ близка к нулю. Дополнительной аргументацией в пользу этого служит тот факт, что для низкотемпературной плазмы число Прандтля ≈ 1 , вследствие чего толщина динамического пограничного слоя – одного порядка с толщиной теплового пограничного слоя [13]. Следует отметить, что цилиндричность столба дуги при $z=\delta$ означает отсутствие здесь подсосывающего действия вследствие магнитных сил.

В соответствии со сказанным, располагаем начало расчетного участка дуги в сечении $z=\delta$. Распределение температуры $T(r)$, напряженности электрического поля E_z , распределение давления $P(r)$ и другие величины могут быть найдены для этого сечения из уравнений энергии и движения для цилиндрической дуги в отсутствии потока газа. Известно, что для расчета электрической дуги достаточно знать полный ток дуги и диаметр трубы, в которой горит дуга. У поверхности электрода роль трубы, отводящей всю выделяющуюся в дуге электрическую энергию, играет поток холодного газа. Если диаметр столба дуги у поверхности электрода несколько меньше или равен диаметру цилиндрического электрода, то диаметр условной трубы, создаваемой потоком холодного газа, можно принять равным диаметру электрода. Таким образом, в предполагаемой расчетной модели области впуска диаметр столба дуги у поверхности электрода должен быть соизмерим с диаметром электрода. Диаметр столба дуги у поверхности электрода может быть найден из визуальных наблюдений как функция тока дуги, полярности электрода, рода газа и величины скорости газа [14].

Таким образом, сделаны следующие предположения:

1. Начало расчетного участка дуги располагается на некотором расстоянии δ от поверхности электрода, равном примерно толщине пограничного слоя (0,5- 1 мм).
2. В сечении $z=\delta$ столб дуги имеет цилиндрическую симметрию, имеется локальное термодинамическое равновесие, скорость газа равна нулю.
3. Диаметр условной трубы, создаваемой потоком холодного газа, в сечении $z=\delta$ равен диаметру электрода ($2 r_0$).

В этом случае входные условия при $z=\delta$ могут быть найдены следующим образом. Из решения уравнения энергетического баланса для цилиндрического столба дуги, горящей в трубе радиусом r_0 , при известном полном токе дуги I , находим распределение температуры $T(0 \leq r \leq r_0, \delta)$ и напряженность электрического поля E_z , которая, как обычно в случае цилиндрической дуги, принимается постоянной по сечению дуги. Далее из уравнений с учетом цилиндрической симметрии определяем радиальное распределение давления

$$P(r, \delta) = P_0 + \varepsilon_0 \int_R^r \frac{j_z}{\xi^2} \left(\int_0^{\xi} j_z t dt \right) d\xi \quad (2.13)$$

Здесь P_0 - давление вне столба дуги при $z=\delta$; второе слагаемое в правой части обусловлено магнитным полем.

Дополнительные граничные условия учитывают вращательную симметрию и отсутствие потока газа и электрического тока на стенке трубы. величины на стенке трубы плазматрона обозначим индексом «ст». Таким образом, краевые условия могут быть записаны:

$$\begin{aligned} z=0 \quad r_0 \leq r \leq R, \quad u=u_0, \quad v=0, \quad T=T_0, \quad P=P_0, \quad E_r=0 \\ z=0 \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad u=0, \quad v=0, \quad T=T(r,0), \quad E_r=0, \quad E_z=E_0, \quad P=P_0, \quad P'=P'(r,0) \\ z \geq 0 \quad r=R, \quad u=0, \quad v=0, \quad T=T_{ст}, \quad j_z=0 \\ z \geq 0 \quad r=0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v=0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Величины $T=T(r,0)$, $P'(r,0)$, E_0 находятся из решения уравнений как для цилиндрической дуги.

В предлагаемой модели области впуска расчетный участок дуги максимально приближен к поверхности внутреннего электрода. Это позволяет при расчете учесть нагрев газа в приэлектродной области, который, согласно наблюдениям авторов работы [15] может давать существенный вклад в формирование струи плазмы.

2.1.3. Модель плазматрона в приближении уравнений типа пограничного слоя с учетом магнитного поля электрической дуги

Приведенная выше система уравнений, несмотря на упрощения, связанные с симметрией задачи, представляет значительную трудность для решения с помощью компьютера. Это заставляет при ее решении делать различные упрощающие предположения. Так в работе [7] принимается постоянство постоянной скорости по сечению трубы, пренебрегается радиальной компонентой плотности электрического тока и потерями на излучения. Кроме того,

линеаризуются зависимости $\sigma(T)$, $\lambda(T)$. При этих допущениях удается получить решение в аналитическом виде. В работе [6] также принимается постоянство массовой скорости по сечению трубы и пренебрегается вкладом аксиальной теплопроводности. Далее предполагается, что вся выделяющаяся электрическая энергия за вычетом излучения, остается внутри дуги и переносится конвекцией в аксиальном направлении. При этом радиальное распределение температуры и мощность дуги в данном сечении находят как для цилиндрической дуги того же радиуса. Расчет проводится численным методом последовательных приближений.

Метод расчета характеристик продольно обдуваемой электрической дуги в цилиндрическом канале в предположении о равновесности, квазинейтральности среды, отсутствии магнитных полей и излучения рассмотрены в [16]. Расчет тепловых параметров проводится методом, аналогичным методу Кармана-Польгаузена в теории пограничного слоя. В работе [17] приводится решение системы уравнений, описывающих свойства столба дуги. Методы точного и сложного расчета приведены в работах [8,9]. Достаточно надежный расчет области впуска плазмотрона можно провести на основе уравнений типа пограничного слоя [10,18].

Поведение электрической дуги, горящей в трубе с ламинарным потоком газа при достаточно больших числах Рейнольдса, числах Маха $M \ll 1$ и радиальной компоненты скорости малой в сравнении с аксиальной, это очевидно из условия, что диаметр трубы $d \ll \ell$ - характерного продольного размера, может быть описано следующей системой уравнений.

Уравнение энергии (перенос тепла):

$$\sigma E^2 = \rho C_p \left(v \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \Psi \quad (2.15)$$

Уравнения движения:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + F = \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.16)$$

Второе уравнение движения в приближении пограничного слоя дает равенство

$$\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P'}{\partial r} = 0$$

Это уравнение может служить для вычисления поправки $P'(r,z)$ к давлению $P(z)$, которое в используемом приближении не зависит от r .

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v) = 0 \quad (2.17)$$

Закон Ома

$$I = 2\pi E \int_0^R \sigma dr \quad (2.18)$$

Запись уравнений аналогично [10], но в уравнение движения введена сила F , обусловленная магнитным полем электрической дуги. Величина F приравнивается аксиальному градиенту магнитного давления в пренебрежении радиальной компонентой плотности электрического тока:

$$F = -\frac{\partial P'}{\partial z} \quad (2.19)$$

Величина магнитного давления P' может быть легко найдена в случае пренебрежимо малой плотности тока j_r в радиальном направлении по сравнению с плотностью тока j_z .

При этом из уравнений Максвелла следует

$$j_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r H_\phi)$$

откуда

$$H_\phi = \frac{1}{r} \int_0^r j_z r dr \quad (2.20)$$

Градиент магнитного давления в радиальном направлении равен

$$\frac{\partial P'}{\partial r} = \varepsilon_0 j_z H_\phi \quad (2.21)$$

Подставляя сюда H_ϕ из (2.20) и интегрируя от R до r , получим

$$P'(r, z) = \varepsilon_0 \int_R^r \frac{j_z}{\xi} \left(\int_0^{\xi} j_z t dt \right) d\xi \quad (2.22)$$

Используя закон Ома $j_z = \sigma E_z$ и, полагая в дальнейшем $E_r = 0$, $E_z = E$ - постоянная по сечению трубы из (2.22) найдем

$$P'(r, z) = \varepsilon_0 E^2 \int_R^r \frac{\sigma}{\xi} \left(\int_0^{\xi} \sigma t dt \right) d\xi \quad (2.23)$$

Реальные свойства газа при решении (ρ , C_p , σ , λ , μ , ψ) полагаются известными функциями температуры и давления.

При решении считаются заданными следующие величины:

I полная сила тока, G- расход газа, R- радиус трубы, r_0 – радиус электрода.

Решение полученных уравнений ищется при граничных условиях:

$$\begin{aligned} z=0 \quad r_0 \leq r \leq R, \quad u=u_0, \quad v=0, \quad T=T_0, \quad P=P_0 \\ z=0 \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad u=0, \quad v=0, \quad T=T(r,0), \quad E=E_0, \quad P=P_0, \quad P'=P'(r,0) \quad (2.24) \\ z \geq 0 \quad r=R, \quad u=0, \quad v=0, \quad T=T_{ст} \\ z \geq 0 \quad r=0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v=0 \end{aligned}$$

Значения величин $T(r,0)$, E_0 , $P'(r,0)$ находятся из расчета цилиндрической дуги радиуса r_0 .

При решении задачи вместо условия равенства нулю v на оси было использовано условие постоянства расхода массы

$$G = 2\pi \int_0^R \rho u r dr \quad (2.25)$$

Это соотношение получается по членным интегрированием по радиусу уравнения (2.17).

2.1.4. Методика и результаты расчета

Уравнения и граничные условия в безразмерном виде. Логарифмические координаты.

Полученные выше уравнения (2.15 - 2.18) и (2.23), (2.25) с краевыми условиями (2.24) удобно записать в безразмерном виде в помощью следующих подстановок

$$\begin{aligned} \bar{z} = \frac{z}{R \operatorname{Re}}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_0} \operatorname{Re}, \\ \bar{T} = \frac{T}{T_*}, \quad \left(\frac{d\bar{P}}{d\bar{z}} \right) = \frac{R^2}{u_0 \mu_*} \left(\frac{dP}{dz} \right), \quad \left(\frac{d\bar{P}'}{d\bar{z}} \right) = \frac{R^2}{u_0 \mu_*} \left(\frac{dP'}{dz} \right), \\ \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_*}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_*}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_*}, \quad \bar{C}_p = \frac{C_p}{C_{p*}} \\ \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_*}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_*}, \quad \bar{E} = \frac{E}{E_*}, \\ \bar{G} = \frac{G}{\pi R^2 \rho_* u_0}, \quad \bar{I} = \frac{I}{\pi R^2 \sigma_* E_0}, \quad \operatorname{Re} = \frac{\rho_* u_0 R}{\mu}, \quad \operatorname{Pr} = \frac{\mu_* C_{p*}}{\lambda_*} \end{aligned}$$

где индексом * обозначены величины при $r=0$, $z=0$.

При этом получают следующие соотношения

$$\rho C_p \left(\bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \bar{r} \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} - \frac{R^2 \Psi_0 \bar{\psi}}{Pr \lambda T_0} + \frac{R^2 \sigma_0 E_0^2}{Pr \lambda T_0} - \bar{\sigma} \bar{E}^2 = 0 \quad (2.2)$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = \left(-\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \right) + \left(-\frac{\partial \bar{P}'}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \bar{r} \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u} \bar{r})}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{r} \bar{v})}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (2.4)$$

$$\bar{I} = 2 \bar{E} \int_0^1 \bar{\sigma} \bar{r} d\bar{r} \quad (2.5)$$

$$\frac{\bar{G}}{2} = \int_0^1 \bar{\rho} \bar{u} \bar{r} d\bar{r} \quad (2.6)$$

$$\bar{P}' = \frac{\epsilon_0 R^2 \sigma_*^2 E_0^2}{\rho_0 u_0} \bar{E}^2 \int_R^{\bar{r}} \bar{\sigma}' \left(\int_0^{\xi} \bar{\sigma} dt \right) d\xi' \quad (2.7)$$

Соответствующие им граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} \bar{z} = 0, \bar{r}_0 \leq \bar{r} \leq 1, \bar{v} = 0, \bar{P} = \bar{P}_0, \bar{T} = \bar{T}_0 \\ \bar{z} = 0, 0 \leq \bar{r} \leq \bar{r}_0, \bar{u} = 0, \bar{v} = 0, \bar{T} = \bar{T}(\bar{r}, 0) \\ \bar{E} = \bar{E}_0, \bar{P} = \bar{P}_0, \bar{P}' = \bar{P}'(\bar{r}, 0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\bar{z} \geq 0, \bar{r} = \bar{R}, \bar{u} = 0, \bar{v} = 0, \bar{T} = \bar{T}_{cm}$$

$$\bar{z} \geq 0, \bar{r} = 0, \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} = 0, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = 0, \bar{v} = 0$$

где значения $\bar{T} = \bar{T}(\bar{r}, 0)$, $\bar{E} = \bar{E}_0$, $\bar{P}' = \bar{P}'(\bar{r}, 0)$ находятся из решения уравнений для цилиндрической дуги радиуса \bar{r}_0 .

Для удобства счета в уравнении вместе координаты r введена координата $\eta = \ln(1 + \Delta - \bar{r})$. Это дает возможность, задавая различные Δ , растягивать пристеночную область, где велики градиенты искомых величин по радиусу. Тогда система уравнений (2.2)-(2.7) и граничные условия (2.8) в новых координатах η имеют вид

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{L} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} + W \bar{C}_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} + \bar{\rho} \bar{u} \bar{P} \bar{C}_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} + \bar{P} (\bar{a} \bar{\sigma} \bar{E}^2 - \bar{b} \bar{\psi}) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\bar{N} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right) + W \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} - \bar{\rho} \bar{u} \bar{P} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \left(-\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \right) \bar{P} + \left(-\frac{\partial \bar{P}'}{\partial \bar{z}} \right) \bar{P} = 0 \quad (2.10)$$

$$W = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\partial(\overline{\rho u})}{\partial z} \overline{P} d\eta \quad (2.11)$$

$$\overline{I} = 2\overline{E} \int_{\eta_0}^{\eta_M} \overline{\sigma} \overline{P} d\eta \quad (2.12)$$

$$\frac{\overline{G}}{2} = \int_{\eta_0}^{\eta_M} \overline{\rho u} \overline{P} d\eta \quad (2.13)$$

$$\overline{P}' = cE^2 \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{\overline{\sigma}}{1 + \Delta - e^{\eta}} \left(\int_{\eta_M}^{\eta} \overline{\sigma} \overline{P} d\eta \right) e^{\eta} d\eta \quad (2.14)$$

Здесь уравнение неразрывности проинтегрировано и введены следующие обозначения

$$\overline{\alpha} = \frac{R^2 \sigma_* E_*^2}{C_p \mu_* T_*} \quad \overline{B} = \frac{R^2 \Psi_*}{C_p \mu_* T_*} \quad \overline{C} = \frac{\varepsilon_* R^2 \sigma_*^2 E_*^2}{\rho_* u_*^2}$$

$$\overline{k} = (1 + \Delta - e^{\eta}) e^{-\eta}, \quad \overline{P} = (1 + \Delta - e^{\eta}) e^{\eta} \quad \eta_0 = \ln \Delta$$

$$\eta_M = \ln(1 + \Delta), \quad \overline{N} = \overline{\mu k}, \quad \overline{L} = \overline{\lambda k}, \quad \overline{W} = \overline{\rho v} (1 + \Delta - e^{\eta})$$

Граничные условия в новых переменных записываются следующим образом

$$\begin{aligned} \overline{z} = 0, \quad \eta_* \leq \eta \leq \eta_0, \quad \overline{u} = \overline{u}_0, \quad \overline{v} = 0, \quad \overline{P} = \overline{P}_0, \quad \overline{T} = \overline{T}_0 \\ \overline{z} = 0, \quad \eta_M \leq \eta \leq \eta_*, \quad \overline{u} = 0, \quad \overline{v} = 0, \quad \overline{T} = \overline{T}(\eta, 0) \\ \overline{E} = \overline{E}_0, \quad \overline{P} = \overline{P}_0, \quad \overline{P}' = \overline{P}'(\eta, 0) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\overline{z} \geq 0, \quad \eta = \eta_0, \quad \overline{u} = 0, \quad \overline{v} = 0, \quad \overline{T} = \overline{T}_{ст}$$

$$\overline{z} \geq 0, \quad \eta = \eta_M, \quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta} = 0,$$

где значения $\overline{T}(\eta, 0)$; $\overline{E} = \overline{E}_0$, $\overline{P}' = \overline{P}'(\eta, 0)$, находятся из решения уравнений для цилиндрической дуги радиуса η , по методу Уленбуша [19].

2.1.5. Расчет входных условий

Для нахождения входных условий произведен расчет распределения температуры и характеристик цилиндрически симметричной дуги в аргоне методом, предложенным в работе [19].

Свойства стационарной цилиндрической дуги без учета конвекции описываются в хорошем соответствии с экспериментом, дифференциальным уравнением энергетического баланса

$$r_0(\sigma E^2 - \Psi) = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right), \quad (2.16)$$

где r_0 – радиус разрядной трубы, $\xi = \frac{r}{r_0}$ нормированный радиус, E – напряженность аксиального электрического поля, T – температура дуги, σ , λ , ψ – коэффициенты переноса. Материальные функции σ , λ , ψ – зависят от давления P и температуры T .
Граничными условиями являются:

$$\begin{aligned} T &= T_A, \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0, \quad \text{при } \xi = 0; \\ T &= T_{ст}, \quad \text{при } \xi = 1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В качестве параметров входят давление в трубе, напряженность электрического поля, которые принимаются независимыми от r , радиус трубы r_0 и температура стенки $T_{ст}$.

Для упрощения расчета вводится функция теплопроводности

$$S(T) = \int_0^T \lambda(T) dT \quad (2.18)$$

При этом граничные условия преобразуются к виду

$$\begin{aligned} S &= S_A, \quad \frac{\partial S}{\partial \xi} = 0, \quad \text{при } \xi = 0 \\ S &= S_{ст}, \quad \text{при } \xi = 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

а уравнение (2.16) записывается так:

$$r_0^2(\sigma E^2 - \Psi) = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial S}{\partial \xi} \right) \quad (2.20)$$

Интегрирование уравнения (2.20) дает распределение функции теплопроводности

$$S(\xi) = S_A - \frac{\left[(S_A - S_{ст}) + r_0^2 \int_0^1 \psi \xi \ln \frac{1}{\xi} d\xi \right] \cdot \int_0^\xi \sigma \xi \ln \frac{\xi}{\xi'} d\xi' + r_0^2 \int_0^\xi \psi \xi' \ln \frac{\xi}{\xi'} d\xi' \cdot \int_0^1 \sigma \xi \ln \frac{1}{\xi} d\xi}{\int_0^1 \sigma \xi \ln \frac{1}{\xi} d\xi} \quad (2.21)$$

Это нелинейное интегральное уравнение. Задание независимых параметров r_0 , S_A , $S_{ст}$, P дает возможность получить однозначное решение уравнений (2.21).

Для расчета применяется метод последовательных приближений. В качестве нулевого приближения берется функция

$$S_0(\xi) = S_A - \xi^2 (S_A - S_{ст}) \quad (2.22)$$

и рассчитывается правая часть уравнений (2.21) с полученным $S_1(\xi)$ приближением, повторяем тот же прием и приходим к $S_2(\xi)$ приближению и т.д. пока не будет удовлетворена заданная точность.

Распределение $S_1(\xi)$ дает возможность рассчитывать затем напряженность E , силу тока J , электрическую мощность N мощность излучения ψ по формулам:

$$E = \frac{1}{r_0} \left[\frac{(S_A - S_{cr}) + r_0^2 \int_0^1 \psi \xi \ln \frac{1}{\xi} d\xi}{\int_0^1 \sigma \xi \ln \frac{1}{\xi} d\xi} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

$$I = 2\pi r_0^2 E_0 \int_0^1 \sigma \xi d\xi \quad (2.24)$$

$$N = IE \quad (2.25)$$

$$\psi = 2\pi r_0^2 \int_0^1 \psi \xi d\xi \quad (2.26)$$

При расчете использовались теплофизические функции $\lambda(T)$, $\sigma(T)$, $\psi(T)$, приведенные в работе [38], давление 1 атм., температура стенки 300К, радиус разрядной трубы 0,1 см. Расчет проведен на компьютере с относительной ошибкой $(S_n - S_{n-1})/S_n < 1\%$. Применяя полученное распределение $S(\xi)$ и используя формулу (2.18) т.е. по известным $S(T)$ можно определить распределение температуры $T(\xi)$. По известным $T(\xi)$ находятся $P'(\xi)$ т.е. магнитное давление.

Таким образом из решения уравнения для цилиндрической дуги находятся входные значения $T(\xi)$, E_0 , $P'(\xi)$, которые применяются для расчета плазматрона в качестве входных условий.

2.1.6. Разностные уравнения

Дифференциальные уравнения (2.9)-(2.11) аппроксимируются в конечных разностях по неявной двухслойной схеме.

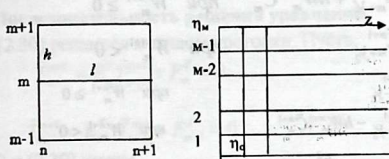
Разностные аналоги уравнений (2.9)-(2.11) во внутренних узлах ($m=1,2, \dots, M$; $n=1,2,3, \dots$) сеточной области $w_{nl} = \{h_0 + mh, nl, m=0, 1, 2, \dots, M, n=0,1,2, \dots\}$ имеет вид:

$$\Lambda_1 \bar{T} + (w \bar{C}_p)_m^{n+1} \bar{T}_r - (\bar{\rho} \bar{u} \bar{C}_p \bar{P})_m^{n+1} \frac{\bar{T}_m^{n+1} - \bar{T}_m^n}{\ell} - \bar{P}_m \left[\bar{\alpha} \bar{\sigma}_m^{n+1} (\bar{E}^{n+1})^2 - \bar{b} \bar{\psi}_m^{n+1} \right] = 0 \quad (2.27)$$

$$\Lambda_1 \bar{u} + (w)_m^{n+1} \bar{u}_\eta - (\bar{\rho} \bar{u} \bar{P})_m^{n+1} \frac{\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^n}{\ell} - \bar{R}_m \left(\frac{d\bar{P}}{dz} \right)^{n+1} - \bar{P}_m \left(\frac{d\bar{P}^n}{dz} \right)^{n+1} = 0 \quad (2.28)$$

$$W_m^{n+1} = W_m^{n+1} + \frac{h}{2\ell} \left\{ (\bar{\rho} \bar{u})_m^{n+1} - (\bar{\rho} \bar{u})_m^n \right\} \bar{P}_m + \left\{ (\bar{\rho} \bar{u})_{m-1}^{n+1} - (\bar{\rho} \bar{u})_{m-1}^n \right\} \bar{P}_{m-1} \quad (2.29)$$

где вторые производные в дивергентном виде представлены по схеме Г.И.Марчука [39], первые производные заменены несимметричными разностями, чем обеспечена корректность метода прогонки при решении разностных уравнений. Вся область разбивается равномерной сеткой с шагом h по координате η и с шагом ℓ по координате \bar{z} как это изображено на схеме



M - число шагов по координате η .

Производные в уравнениях были заменены конечными разностями следующим образом:

$$\bar{T}_m^n = \bar{T}(\eta_0 + mh, n\ell), \quad \bar{u}_m^n = \bar{u}(\eta_0 + mh, n\ell)$$

$$m=1, 2, \dots, M-1; \quad n=1, 2, \dots,$$

$$\bar{T}_\eta = \begin{cases} \frac{\bar{T}_{m+1}^{n+1} - \bar{T}_m^{n+1}}{h}, & W_m^{n+1} \geq 0 \\ \frac{\bar{T}_m^{n+1} - \bar{T}_{m-1}^{n+1}}{h}, & W_m^{n+1} < 0 \end{cases}$$

$$\bar{u}_\eta = \begin{cases} \frac{\bar{u}_{m+1}^{n+1} - \bar{u}_m^{n+1}}{h}, & W_m^{n+1} \geq 0 \\ \frac{\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_{m-1}^{n+1}}{h}, & W_m^{n+1} < 0 \end{cases}$$

$$\Lambda_i \Phi = \frac{\bar{L}_{i,m+1/2}^{n+1} (\Phi_{m+1}^{n+1} - \Phi_m^{n+1}) - \bar{L}_{i,m-1/2}^{n+1} (\Phi_m^{n+1} - \Phi_{m-1}^{n+1})}{h^2}$$

$$i=1,2, \quad \bar{L}_1 = \bar{L}, \quad \bar{L}_2 = \bar{N}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right)_m^{n+1} = \frac{\bar{T}_m^{n+1} - \bar{T}_m^n}{\ell}, \quad \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right)_m^{n+1} = \frac{\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^n}{\ell},$$

Тогда система уравнений (2.27)-(2.29) примет вид:

$$A_m^T \bar{T}_m^{n+1} - B_m^T \bar{T}_m^{n+1} + C_m^T \bar{T}_{m-1}^{n+1} + D_m^T = 0 \quad (2.30)$$

$$A_m^v \bar{u}_m^{n+1} - B_m^v \bar{u}_m^{n+1} + C_m^v \bar{u}_{m-1}^{n+1} + h^2 \bar{P}_m \left(-\frac{d\bar{P}}{dz} \right)^{n+1} + D_m^v = 0 \quad (2.31)$$

$$w_m^{n+1} = w_{m-1}^{n+1} + \frac{h}{2\ell} \left\{ (\bar{\rho}u)_m^{n+1} - (\bar{\rho}u)_m^n \right\} \bar{P}_m + \left[(\bar{\rho}u)_{m-1}^{n+1} - (\bar{\rho}u)_{m-1}^n \right] \bar{P}_{m-1} \quad (2.32)$$

где

$$\bar{A}_m^T = \begin{cases} \bar{L}_{m+1/2}^{n+1} + hW_m^{n+1} \bar{C}_m^{n+1} & \text{при } W_m^{n+1} \geq 0 \\ \bar{L}_{m+1/2}^{n+1} & \text{при } W_m^{n+1} < 0 \end{cases}$$

$$C_m^T = \begin{cases} \bar{L}_{m-1/2}^{n+1} & \text{при } W_m^{n+1} \geq 0 \\ \bar{L}_{m-1/2}^{n+1} - hW_m^{n+1} \bar{C}_m^{n+1} & \text{при } W_m^{n+1} < 0 \end{cases}$$

$$B_m^T = A_m^T + C_m^T + \frac{h^2}{\ell} \bar{P}_m (\bar{\rho}u \bar{C}_p \bar{P})_m^{n+1}$$

$$D_m^T = \frac{h^2}{\ell} (\bar{\rho}u \bar{C}_p \bar{C})_m^{n+1} \bar{T}_m^{n+1} + h^2 \bar{P}_m \left[\bar{\alpha} \bar{\sigma}^{n+1} (\bar{E}^{n+1})^2 - \bar{b} \bar{\psi}^{n+1} \right]$$

$$\bar{A}_m^v = \begin{cases} \bar{N}_{m+1/2}^{n+1} + hW_m^{n+1} & \text{при } W_m^{n+1} \geq 0 \\ \bar{N}_{m+1/2}^{n+1} & \text{при } W_m^{n+1} < 0 \end{cases}$$

$$C_m^v = \begin{cases} \bar{N}_{m-1/2}^{n+1} & \text{при } W_m^{n+1} \geq 0 \\ \bar{N}_{m-1/2}^{n+1} - hW_m^{n+1} & \text{при } W_m^{n+1} < 0 \end{cases}$$

$$B_m^v = A_m^v + C_m^v + \frac{h^2}{\ell} (\bar{\rho}u \bar{P})_m^{n+1}$$

$$D_m^v = \frac{h^2}{\ell} (\bar{\rho}u \bar{P})_m^{n+1} \bar{u}_m^n - h^2 \left(\frac{d\bar{P}^v}{dz} \right)_m^{n+1} \bar{P}_m$$

К этим разностным уравнениям (2.30)-(2.32) присоединяются уравнения (2.12)-(2.14), в которых интегралы заменены суммами по формуле трапеций и записаны следующим образом

$$\sum_{k=1}^{m-1} h(\bar{\sigma} \bar{P})_k^{n+1} = \frac{\bar{I}}{2(\bar{E})^{n+1}} \quad (2.33)$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} h(\bar{\sigma} \bar{P})_k \bar{u}_k^{n+1} = \frac{\bar{G}}{2} \quad (2.34)$$

$$\bar{P}_k^{n+1} = \bar{C}(\bar{E}^{n+1})^2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\bar{\sigma}_k^{n+1}}{1 + \Delta - e^{\eta_k}} \left(\sum_{k=1}^{m-1} (\bar{\sigma}\bar{P})_k^{n+1} h \right) e^{\eta_k} h \quad (2.35)$$

Таким образом получается система уравнений (2.30)-(2.35), решая которую совместно с граничными условиями необходимо определить искомые величины

$$\bar{T}_m^{n+1}, \quad \bar{u}_m^{n+1}, \quad W_m^{n+1}, \quad \left(\frac{d\bar{P}}{dz} \right)^{n+1}, \quad \bar{P}_m^{n+1}, \quad \bar{E}^{n+1}.$$

2.1.7. Последовательность решения уравнений

Уравнение (2.30) решается методом прогонки. Пусть

$$\bar{T}_m^{n+1} = E_m^T \bar{T}_{m+1}^{n+1} + F_m^T = 0 \quad (2.36)$$

следовательно

$$\bar{T}_{m-1}^{n+1} = E_{m-1}^T \bar{T}_m^{n+1} + F_{m-1}^T = 0 \quad (2.37)$$

Подставляя (2.37) и (2.30) имеем

$$A_m^T \bar{T}_{m+1}^{n+1} - B_m^T \bar{T}_m^{n+1} + C_m^T E_{m-1}^T \bar{T}_{m-1}^{n+1} + C_m^T F_{m-1}^T + D_m^T = 0$$

$$\bar{T}_m^{n+1} = \frac{A_m^T \bar{T}_{m+1}^{n+1} + C_m^T F_{m-1}^T + D_m^T}{B_m^T + C_m^T E_{m-1}^T} \quad (2.38)$$

Сравнивая формулу (2.38) с (2.36), имеем

$$E_m^T = \frac{A_m^T}{B_m^T + C_m^T E_{m-1}^T}, \quad F_m^T = \frac{D_m^T + C_m^T F_{m-1}^T}{B_m^T + C_m^T E_{m-1}^T} \quad (2.39)$$

Поскольку, A_m^T , B_m^T , C_m^T , D_m^T вычислялись по параметрам, полученным из предыдущей итерации, прямая прогонка велась от стенки и оси по формулам (2.39), т.е. вычислялись коэффициенты прогонки E_m^T и F_m^T с использованием граничных условий \bar{T} на стенке:

$$\eta = \eta_0 \quad E_0^T = 0, \quad F_0^T = \bar{T}_{\text{ст}}$$

Температура на оси определяется на основе соответствующего граничного условия:

$$\eta = \eta_0 \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_0} = \frac{-3\bar{T}_m^{n+1} + 4\bar{T}_{m-1}^{n+1} + \bar{T}_{m-2}^{n+1}}{-2h} = 0$$

отсюда $-3\bar{T}_m^{n+1} + 4\bar{T}_{m-1}^{n+1} + \bar{T}_{m-2}^{n+1} = 0$, а

$$\bar{T}_{m-1}^{n+1} = E_{m-1}^T \bar{T}_m^{n+1} + E_{m-1}^T \quad \text{тогда}$$

$$\bar{T}_{m-2}^{n+1} = E_{m-2}^T \bar{T}_{m-1}^{n+1} + F_{m-2}^T = E_{m-2}^T (E_{m-1}^T \bar{T}_m^{n+1} + F_{m-1}^T) + F_{m-2}^T$$

Значит

$$-3\bar{T}_m^{n+1} + 4E_{m-1}^T \bar{T}_m^{n+1} + 4F_{m-1}^T - E_{m-2}^T E_{m-1}^T \bar{T}_m^{n+1} - E_{m-2}^T F_{m-1}^T - F_{m-2}^T = 0$$

$$(-3 + 4E_{m-1}^T - E_{m-2}^T E_{m-1}^T) \bar{T}_m^{n+1} = -4F_{m-1}^T + E_{m-2}^T F_{m-1}^T + F_{m-2}^T$$

отсюда находим

$$\bar{T}_m^{n+1} = \frac{4F_{m-1}^T - E_{m-2}^T F_{m-1}^T - F_{m-2}^T}{3 - 4E_{m-1}^T + E_{m-2}^T E_{m-1}^T} + O(h^2) \quad (2.40)$$

По известным коэффициентам прогонки и значением температуры на оси, вычисленной по формуле (2.40), рассчитывается распределение температуры по формуле (2.36) от оси к стенке, т.е. производится обратная прогонка.

Затем по формулам (2.33) и (2.35) вычисляются напряженность электрического поля \bar{E} , постоянна по радиусу сечения и магнитное давление, обусловленное собственным магнитным полем.

После того как найдено первое приближение распределения температуры по радиусу, ищется решение уравнения движения (2.31) в виде [22]

$$\bar{u}_m^{n+1} = X_m^{n+1} + Y_m^{n+1} \left(\frac{d\bar{P}}{dz} \right)^{n+1} \quad (2.41)$$

Подставляя (2.41) в уравнение (2.31), получим

$$A_m^v X_{m+1}^{n+1} + A_m^v Y_{m+1}^{n+1} \left(\frac{d\bar{P}}{dz} \right)^{n+1} - B_m^v X_m^{n+1} - B_m^v Y_m^{n+1} \left(\frac{d\bar{P}}{dz} \right)^{n+1} +$$

$$+ C_m^v X_{m-1}^{n+1} + C_m^v Y_{m-1}^{n+1} \left(\frac{d\bar{P}}{dz} \right)^{n+1} + h^2 \bar{P}_m \left(-\frac{d\bar{P}}{dz} \right)^{n+1} + D_m^v = 0$$

Это уравнение расщепляется на два и на уравнения для Y_m^{n+1} исключается

$\left(\frac{d\bar{P}}{dz} \right)^{n+1}$. Тогда имеем

$$A_m^v X_{m+1}^{n+1} - B_m^v X_m^{n+1} + C_m^v X_{m-1}^{n+1} + D_m^v = 0 \quad (2.42)$$

$$A_m^v Y_{m+1}^{n+1} - B_m^v Y_m^{n+1} + C_m^v Y_{m-1}^{n+1} + h^2 \bar{P}_m = 0 \quad (2.43)$$

Уравнения (2.42) и (2.43) решаются методом прогонки аналогично уравнению энергии. При этом используются краевые условия для \bar{u} на стенке и оси плазматрона. Тогда при $\eta = \eta_0$, $x = 0$, $y = 0$ и при $\eta = \eta_m$ $\frac{\partial X}{\partial \eta} = 0$, $\frac{\partial Y}{\partial \eta} = 0$

После вычисления X и Y градиент давления определяется из соотношения

$$\left(\frac{d\bar{P}}{dz}\right)^{n+1} = \frac{\frac{G}{2} - h \left[\frac{(\bar{\rho} \bar{P} X)_0^{n+1} + (\bar{\rho} \bar{P} X)_m^{n+1}}{2} + (\bar{\rho} \bar{P} X)_1^{n+1} + \dots + (\bar{\rho} \bar{P} X)_{m-1}^{n+1} \right]}{h \left[\frac{(\bar{\rho} \bar{P} Y)_0^{n+1} + (\bar{\rho} \bar{P} Y)_m^{n+1}}{2} + (\bar{\rho} \bar{P} Y)_1^{n+1} + \dots + (\bar{\rho} \bar{P} Y)_{m-1}^{n+1} \right]} \quad (2.44)$$

полученного из (2.34) и (2.41). Затем по (2.41) рассчитывается распределение аксиальной скорости по радиусу. Наконец для определения W используем (2.32). При расчетах \bar{T}_m^{n+1} , \bar{u}_m^{n+1} прогоночные коэффициенты вычислялись по значениям \bar{T}_m^n , \bar{u}_m^n .

Поэтому найденные \bar{T}_m^{n+1} , \bar{u}_m^{n+1} , W_m^{n+1} , $\left(\frac{d\bar{P}}{dz}\right)^{n+1}$ рассматривались как первое приближение и использовались для нахождения последующих приближений. Эта итерационная процедура повторялась до тех пор, пока не выполнялось соотношение

$$\frac{\left[\left(\frac{d\bar{P}}{dz}\right)^{n+1} \right]^{k+1} - \left[\left(\frac{d\bar{P}}{dz}\right)^n \right]^k}{\left[\left(\frac{d\bar{P}}{dz}\right)^{n+1} \right]^{k+1}} \leq \varepsilon \quad (2.45)$$

где $\varepsilon > 0$, k - номер последовательного приближения.

Контроль вычислений на каждом слое по \bar{z} осуществлялся по балансному соотношению, которое получается из уравнения энергии интегрированием его по η в пределах $[\eta_0, \eta_m]$ и по \bar{z} в пределах $[0, \bar{z}]$ следующим образом: интегрируя уравнение (2.9) от η_0 до η_m и используя граничные условия, имеем

$$-\frac{1}{\text{Pr}} \left(\bar{L} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right)_{\eta=\eta_0}^{\eta_m} + \int_{\eta_0}^{\eta_m} W \frac{\partial \bar{H}}{\partial \eta} d\eta - \int_{\eta_0}^{\eta_m} \bar{\rho} \bar{u} \bar{P} \frac{\partial \bar{H}}{\partial z} d\eta + \int_{\eta_0}^{\eta_m} \bar{\rho} (\bar{\alpha} \bar{\sigma} \bar{E}^2 - \bar{\beta} \bar{\psi}) d\eta = 0 \quad (2.46)$$

где $\bar{H} = \int_0^{\bar{z}} \bar{C}_p d\bar{T}$ - энтальпия.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\eta_*}^{\eta_*} W \frac{\partial \bar{H}}{\partial \eta} d\eta = W \bar{H} \Big|_{\eta_*}^{\eta_*} - \int_{\eta_*}^{\eta_*} \bar{H} \frac{\partial W}{\partial \eta} d\eta = - \int_{\eta_*}^{\eta_*} \bar{H} \frac{\partial W}{\partial \eta} d\eta = - \int_{\eta_*}^{\eta_*} \bar{H} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u} \bar{P})}{\partial \bar{z}} d\eta \quad (2.47)$$

где использовано граничное условие $W=0$ при $\eta = \eta_0$ и $\eta = \eta_m$, и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u} \bar{P})}{\partial \bar{z}}$$

Учитывая (2.47) второй и третий член уравнения (2.46) преобразуем следующим образом

$$\int_{\eta_*}^{\eta_*} \left(W \frac{\partial \bar{H}}{\partial \eta} - \bar{\rho} \bar{u} \bar{P} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}} \right) d\eta = - \int_{\eta_*}^{\eta_*} \left[\bar{H} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u} \bar{P})}{\partial \bar{z}} + \bar{\rho} \bar{u} \bar{P} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}} \right] d\eta = \int_{\eta_*}^{\eta_*} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u} \bar{P} \bar{H})}{\partial \bar{z}} d\eta$$

Тогда уравнение (2.46) запишется в виде

$$-\frac{1}{Pr} \left(\bar{L} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right)_{\eta_*} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int_{\eta_*}^{\eta_*} \bar{\rho} \bar{u} \bar{P} \bar{H} d\eta + \int_{\eta_*}^{\eta_*} \bar{P} (\bar{\alpha} \bar{\sigma} \bar{E}^2 - \bar{\beta} \bar{\psi}) d\eta = 0$$

Введем среднemasовую энтальпию

$$H^{(1)} = \frac{\int_{\eta_*}^{\eta_*} \bar{\rho} \bar{u} \bar{P} \bar{H} d\eta}{\int_{\eta_*}^{\eta_*} \bar{\rho} \bar{u} \bar{P} d\eta} \quad \text{или} \quad \bar{\rho} \bar{u} \bar{P} d\eta = \frac{\bar{G}}{2}$$

тогда $H^{(1)} = \frac{2 \int_{\eta_*}^{\eta_*} \bar{\rho} \bar{u} \bar{P} \bar{H} d\eta}{\bar{G}}$, при этом уравнение запишем следующим образом

$$\left[\int_{\eta_*}^{\eta_*} \bar{P} (\bar{\alpha} \bar{\sigma} \bar{E}^2 - \bar{\beta} \bar{\psi}) d\eta - \frac{1}{Pr} \left(\bar{L} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right)_{\eta_*} \right] \frac{2}{\bar{G}} - \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \bar{z}} = 0$$

Интегрируя от 0 до \bar{z} , имеем

$$[H^{(1)}(\bar{z}) - H^{(1)}(0)] \bar{G} = \int_0^{\bar{z}} 2 \left[\int_{\eta_*}^{\eta_*} \bar{P} (\bar{\alpha} \bar{\sigma} \bar{E}^2 - \bar{\beta} \bar{\psi}) d\eta - \frac{1}{Pr} \left(\bar{L} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right)_{\eta_*} \right] d\bar{z} \quad (2.48)$$

Рассмотрим в отдельности каждый член правой части уравнения (2.48)

$$2 \int_{\eta_0}^{\eta_n} \bar{P} \bar{\alpha} \bar{\sigma} \bar{E}^2 d\eta = 2 \bar{E}^2 \bar{\alpha} \int_{\eta_0}^{\eta_n} \bar{\sigma} \bar{P} d\eta = 2 \bar{E}^2 \bar{\alpha} \frac{\bar{I}}{2 \bar{E}} = \bar{\alpha} \bar{I} \bar{E} = \Pi$$

$$2 \int_{\eta_0}^{\eta_n} \bar{P} \bar{\beta} \bar{\psi} d\eta = 2 \bar{\beta} \int_{\eta_0}^{\eta_n} \bar{\psi} \bar{P} d\eta, \quad q_1 = \bar{\beta} \int_{\eta_0}^{\eta_1} \bar{\psi} \bar{P} d\eta, \quad q_2 = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\bar{L} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right)_{\eta=\eta_n}$$

Тогда окончательно имеем

$$[H^{(1)}(\bar{z}) - H^{(1)}(0)] \bar{G} = \int_0^{\bar{z}} 2[\Pi - 2(q_1 - q_2)] d\bar{z} \quad (2.49)$$

Соотношение (2.49) есть балансное соотношение для контроля точности счета. Расчет заканчивался в начале зоны полностью развитого течения. Поэтому в программе расчета области впуска плазмотрона предусматривалась проверка окончания вычислений в форме.

$$\left| \bar{T}_m^{n+1} - \bar{T}_m^n \right| / \left| \bar{T}_m^{n+1} \right| < \delta, \quad \text{где } \delta > 0 \quad (2.50)$$

2.1.8. Результаты расчета

Программа вычислений по вычисленному алгоритму была реализована на языке программирования Fortran.

Ниже рассмотрены некоторые результаты расчета области впуска плазмотрона с параметрами;

- радиус канала плазмотрона $R = 1,25$ мм;
- радиус электрода $r_0 = 1$;
- ток дуги $I = 65$ А;
- плазмообразующий газ - аргон, расход $G = 0,25$ г/с;
- давление $P_0 = 1$ атм.;
- температура стенки $T_{ст} = 300^{\circ}$ К,
- входной профиль скорости ступенчатый.

При расчете шаг по z , $\ell = 0,001$, $E = 0,05$, $\delta = 0,01$.

Реальные свойства аргона электропроводность, теплопроводность, излучательная способность взяты из работы [36], вязкость из [38] плотность из [40], удельная теплоемкость при постоянном давлении и энтальпия из [41] и задавались в виде таблиц.

На рис. 2.3 дано поле температур, на рис. 2.4 профили аксиальной и массовой ρu скоростей в сечениях трубы на различном расстоянии z от поверхности внутреннего электрода. Характерным для течения газа являются большие значения аксиальной скорости, и лишь постепенное заполнение всего сечения трубы текущим газом.

Из результатов расчета радиального потока массы следует, что поток массы в начальных сечениях стремится к оси столба дуги, а затем постепенное от оси к стенке трубы.

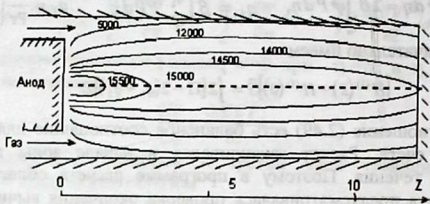


Рис.2.3. Поле температур в области впуска газоплазмотрона.

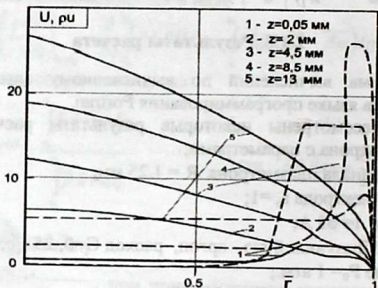


Рис.2.4. Профили аксиальной скорости U ($\times 10^{-2}$ м/с) и массовой скорости ru ($г\text{-}см^{-2}\text{-}сек^{-1}$, пунктир) в сечениях трубы на расстоянии z от внутреннего электрода.

На рис. 2.5. и 2.6 представлены радиальные распределения температур и магнитного давления в сечениях на различном расстоянии от поверхности электрода. Из рис. 2.5 видно, что значение магнитного давления на оси дуги уменьшается с удалением от поверхности внутреннего электрода, а участок профиля в районе температур до 5000 К расширяется. Из рис.2.6. видно, что значение магнитного давления на оси дуги уменьшается с удалением от поверхности внутреннего электрода.

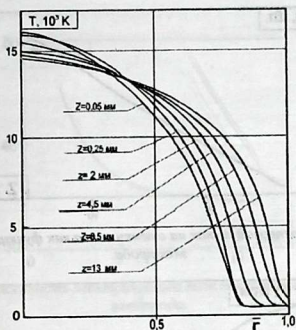


Рис.2.5. Радиальное распределение температуры для сечений на различном расстоянии z от поверхности электрода.

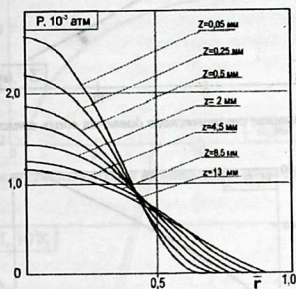


Рис.2.6. Радиальное распределение магнитное давление для сечений на различном расстоянии z от поверхности электрода.

На рис.2.7-2.10 показан тепловой поток на стенку сопла (Q), статическое давление (P) и потенциал электрического поля дуги (U) как функции расстояния от электрода.

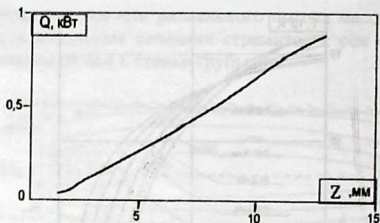


Рис.2.7. Полный тепловой поток на стенки сопла как функция расстояния от электрода.

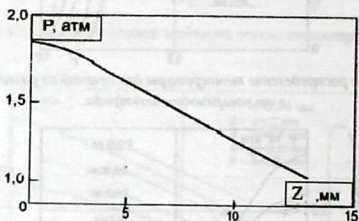


Рис.2.8. Распределение статического давления вдоль сопла плазматрона.

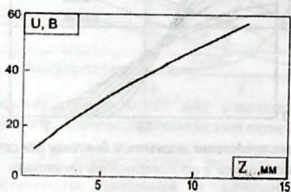


Рис.2.9. Распределение потенциала электрического поля дуги относительно электрода.

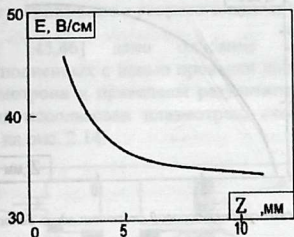


Рис.2.10. Напряженность электрического поля как функция расстояния от электрода.

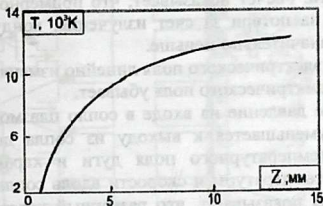


Рис.2.11. Изменение среднemasсовой температуры вдоль сопла плазматрона.

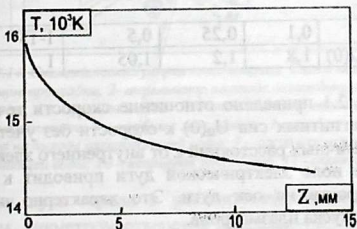


Рис.2.12. Аксиальное распределение температуры плазмы на оси дуги

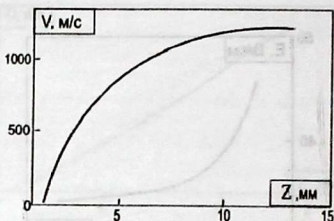


Рис. 2.13. Изменение среднemasсовой скорости вдоль сопла плазматрона.

Полные потери мощности дуги складываются из потерь на излучение и потерь тепла, отдаваемого стенками за счет теплопроводности. Расчет показывает, что примерно 20-25% полной мощности идет на потери за счет излучения, кондуктивный поток тепла на стенку значительно меньше.

Потенциал электрического поля линейно изменяется вдоль дуги, напряженность электрического поля убывает.

Статическое давление на входе в сопло плазматрона равно 1,8 атм. и плавно уменьшается к выходу из сопла до атмосферного давления, вид температурного поля дуги и характер изменения среднemasсовых температуры и скорости вдоль сопла плазматрона и другие параметры показывают, что разгонный участок плазматрона имеет протяженность ~13 мм. Далее устанавливается полностью развитое течение с постоянной температурой плазмы.

Таблица 2.1.

(мм)	0,1	0,25	0,5	1-13
$U_m(0)/U(0)$	1,8	1,2	1,05	1

В таблице 2.1 приведено отношение скорости течения газа на оси с учетом магнитных сил $U_m(0)$ к скорости без учета магнитных сил $U(0)$ для различных расстояний z от внутреннего электрода.

Магнитное поле электрической дуги приводит к повышению аксиальной скорости на оси дуги. Это характерно особенно для начала области впуска плазматрона.

Как видно из расчетов при общем токе до 100 А влияние магнитного поля на величину аксиальной скорости на оси дуги не превышает 10-15%.

2.1.9. Экспериментальное исследование электрической дуги в плазматроне и сравнение с теоретическими результатами

В работах [45,46] дано описание экспериментальных исследований, выполненных с целью проверки допущений, принятых при расчете плазматрона и приведены результаты. Для проведения исследований был использован плазматрон, схематический разрез которого показан на рис. 2.14.

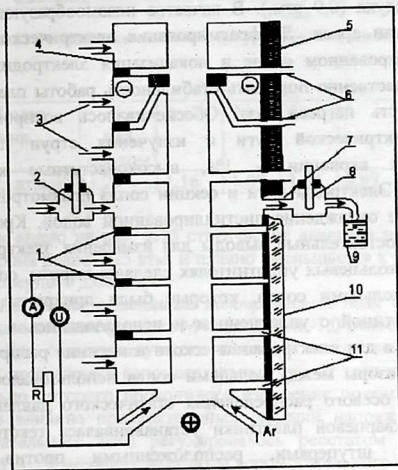


Рис.2.14. Схематический разрез плазматрона. Схема измерений:

1-уплотняющие прокладки; 2-термометр на входе охлаждающей воды; 3-вход охлаждающей воды; 4-охранная шайба; 5-текстолитовая колодка с патрубками для присоединения манометров; 6-трубки к манометру; 7-выход охлаждающей воды; 8-термометр на выходе охлаждающей воды; 9-сосуд для измерения расхода охлаждающей воды; 10-кварцевая пластинка; 11-оптические окна.

Электрическая дуга горела в расширяющемся коническом сопле длиной 32 мм, диаметром отверстия на входе – 2,5 мм, на выходе = 3,3 мм. Сопло было образовано набором медных диафрагм толщиной 4 мм, изолированных друг от друга газовыми промежутками и по периферии – резиновыми уплотняющими прокладками толщиной 0,8

мм. Анод выполнен в виде медного усеченного конуса с вершиной у входа в сопло. Катод в виде тарированного вольфрама имеет форму кольца толщиной 1 мм и установлен у выхода из сопла. Катод защищен от окисления кислородом воздуха охранной шайбой. Анодное пятно практически может перемещаться только в азимутальном направлении, т.к. толщина вольфрамового кольца соизмерима с диаметром катодного пятна. Струя плазмы истекает в атмосферу воздуха (0,9 атм.). В качестве плазмообразующего газа был использован аргон. Диафрагмирование электрической дуги в узком профилированном сопле и локализация электродных пятен позволили существенно повысить стабильность работы плазматрона и эффективность нагрева газа. Обеспечивалось воспроизводство мощности электрической дуги и излучения струи плазмы с коэффициентом вариации $\sim 1\%$, высокочастотные колебания отсутствовали. Электроды дуги и секции сопла плазматрона имели индивидуальное охлаждение дистиллированной водой. Кроме того, они имели самостоятельные выводы для измерения электрического потенциала. В кольцевых уплотнителях сделаны вырезы, создающие щели между кольцами сопла, которые были прикрыты снаружи кварцевой пластиной с уплотнением и использовались в качестве оптических окон для спектроскопического измерения распределения температуры. Зазоры между кольцами сопла использовались также для измерения осевого распределения статического давления. Для этого вместо кварцевой пластинки устанавливалась текстолитовая пластинка со штуцерами, расположенными против щелей плазматрона.

Исследования проводились при токе дуги 80 А и расходе рабочего газа – 0,25 г/с (~ 8 л/мин).

а). Измерение статического давления проводилось манометром, соединенным трубкой с соответствующей щелью между кольцами сопла. Образцовым манометром типа МО 100-1 точности 0,4 были выполнены измерения относительно больших давлений у входа в сопло, на первых трех окнах от анода. Для измерения малых изменений статического давления на 4-6 окнах от анода использовался водяной манометр. Средние значения из 5-7 независимых измерений приведены на рис. 2.15 и в таблице

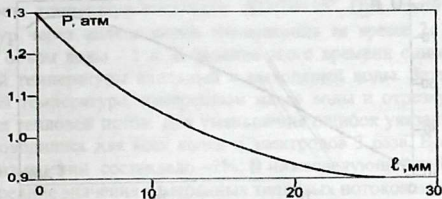


Рис. 2.15. Распределение статического давления вдоль сопла плазмотрона.

Таблица 2.2.

Номер окна	1 над анодом	2	3	4	5	6 над катодом
P , атм.	1,25	1,16	1,07	1,05	0,97	0,9

Как видно на рис. 2.15 статическое давление на входе в сопло плазмотрона равно 1,25 атм. и плавно уменьшается к выходу из сопла до атмосферного давления.

б) Измерение потенциала электрического поля было выполнено с помощью вольтметра типа М45 точности $-1,0$ относительно анода и катода. Для создания лучшего контакта между кольцом-зондом и плазмой пропускался вспомогательный ток от того же электрода относительно которого проводилось измерение потенциала, и это исключало влияние приэлектродных падений напряжения. Величина вспомогательного тока регулировалась реостатом R в интервале $0,003-0,5$ А. Изменения величины вспомогательного тока от $0,003$ до $0,5$ А не влияют на показания вольтметра, что свидетельствует о том, что сопротивление измерительной цепи значительно больше, чем сопротивление участка между плазмой и кольцами сопла плазмотрона.

Результаты измерений распределения потенциала вдоль сопла плазмотрона показаны на рис. 2.16 и в таблице.

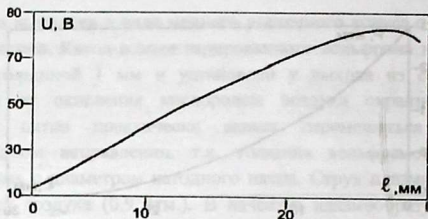


Рис. 2.16. Распределение потенциала электрического поля дуги относительно анода.

Потенциал электрического поля дуги.

Таблица 2.3.

Расстояние от анода, мм	2,45	6,5	11,5	16,25	21,9	26,5	29
						катод	охранное кольца
U, В	20,5	30,2	45,5	59	73,5	80	74,5

Погрешность измерений $\sim 1\%$. Результаты усреднялись из 5-7 независимых измерений. Как показано на рисунке 2.16, потенциал электрического поля линейно изменяется вдоль дуги. Напряженность электрического поля постоянна вдоль дуги и равна 25 В/см. Считая, что потенциал изменяется линейно вплоть до поверхности анода (пунктир в начале кривой на рис.2.16), то на оси ординат отсекается 12 В. На охранном кольце измеренное значение потенциала относительно катода равна 6 В. С учетом контактной разности потенциала зонд-плазма получено для анодного падения напряжения ~ 6 В, катодного ~ 12 В.

в). Измерение тепловых потоков проводилось обычным калориметрическим методом — по расходу и нагреву охлаждающей воды. Схема измерений тепловых потоков на примере одного кольца показана на рис. 2.14. Для нахождения полных потерь тепловой мощности дуги были определены потоки тепла и на электроды дуги. Теловой поток рассчитывался по формуле:

$$q = m c \Delta T,$$

где m — массовый расход воды, $\Delta T = T_2 - T_1$ — разность температур выходящей и входящей воды. Понятно, что погрешность в определении теплового потока складывается из ошибок измерения ΔT и m . Погрешности в определении тепловых потоков будут тем меньше, чем больше разность температур выходящей и входящей воды. Для повышения точности измерений устанавливалась регулируемая диафрагма, изменяющая расход воды. В рассматриваемом эксперименте,

эта разность температур составила $\Delta T \approx 10 + 15^\circ$. При такой разности температур через кольца сопла плазмотрона за время 2-3 минуты протекал объем воды - 1 л. В течение этого времени снимались 5-7 показаний температуры входящей и выходящей воды. Затем, по усредненной температуре, измеренным массе воды и отрезку времени находился тепловой поток. Для уменьшения ошибок указанные измерения проводились для всех колец и электродов 3 раза. Воспроизводимость измерений составляло $\sim 1\%$. В нижеприведенной таблице приведены средние значения измеренных тепловых потоков на электроды дуги и секции сопла плазмотрона.

Тепловые потоки на электроды дуги и секции сопла. Таблица 2.4.

Место измерения	анод	Номер кольца						катод	охранное кольцо	Полный поток
		1	2	3	4	5	6			
Q, кВт	0,47	0	0,05	0,28	0,52	0,43	0,9	0,41	0,45	3,5

По данным таблицы полные потери тепловой мощности составили $\sim 3,5$ кВт. Измеренный непосредственно тепловой поток к охлаждающей воде составил ~ 4 кВт. Расхождение тепловых потерь при измерении на весь плазмотрон составил $\sim 10\%$. На рис. 2.17 показан суммарный тепловой поток на анод и стенки сопла как функция расстояния от анода. Согласно рисунку 2.17, тепловой поток плавно увеличивается от анода к катоду от 0,5 кВт до 4 кВт, если проводимая мощность к дуге равна 6,4 кВт, то полные потери мощности дуги $\sim 60\%$.

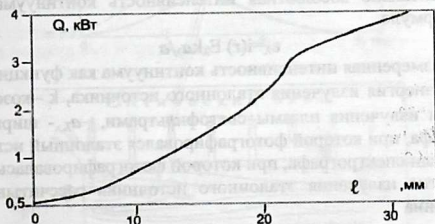


Рис. 2.17. Полный тепловой поток на анод и стенки сопла как функция расстояния от анода.

г). Спектроскопическое измерение температуры плазмы проводилось методом поперечной съемки на спектрографе ИСП-28. Температура плазмы определялась по абсолютной интенсивности континуума

в области спектра 4800°A в предположении термического равновесия. Плазмотрон располагался горизонтально, и изображение поперечного сечения дуги проектировалось ахроматическим конденсатором ($F=150$ мм) с увеличением $\sim 0,8$ на вертикальную щель спектрографа. Для получения максимальных почернений, но не выходящих из области нормальных, было подобрано время экспозиции, коэффициент ослабления плазмы нейтральными светофильтрами и ширина щели спектрографа при съемке плазмы и эталонного источника. Спектр фотографировался на фотопластинках с выдержкой 1 сек. Абсолютные интенсивности континуума были найдены сравнением с излучением эталонного источника – вольфрамовой светоизмерительной лампы СИ-6 с ленточным телом накала. Марки почернения наносились при той же системе освещения щели и при той же выдержке от эталонного источника изменением ширины щели спектрографа. Температура нити лампы измерена оптическим пирометром ОППИР-17. Истинная температура нити лампы эталонной лампы вычислена по измеренной яркостной температуре. Обработка спектрограмм проводилось на микрофотометре МТ-2. Для каждого сечения путем фотометрирования снимков полученных при одинаковых условиях, строились кривые изменения почернений континуума поперек спектрограммы. Полученные кривые почернений усреднялись по трем независимым спектрам, и с помощью характеристической кривой производился переход от почернений к интенсивностям. Измеренная интегральная интенсивность излучения континуума пересчитана к радикальному распределению излучательной способности по таблицам. Экспериментально абсолютная интенсивность континуума находилась по формуле

$$\varepsilon_{\lambda} = i(r) E_{\lambda} k a_{\lambda} / a$$

где $i(r)$ – измеренная интенсивность континуума как функция радиуса дуги; E_{λ} – энергия излучения эталонного источника, k – коэффициент ослабления излучения плазмы светофильтрами, a_{λ} – ширина щели спектрографа, при которой фотографировался эталонный источник, a – ширина щели спектрографа, при которой фотографировалась дуга.

Энергия излучения эталонного источника рассчитывалась по формуле Вина

$$E_{\lambda} = 2\varepsilon_{\lambda} C_1 \lambda^{-5} e^{-C_2/\lambda T_{\lambda}} \Delta\lambda,$$

здесь: $\varepsilon_{\lambda} = 0,44$ – излучательная способность вольфрама, $C_1 = 0,599 \cdot 10^{-5}$ эрг·см²/с; $C_2 = 1,438$ см·град; $\lambda = 4800^{\circ}\text{A}$ – длина волны в области изменения континуума; T_{λ} – температура лампы.

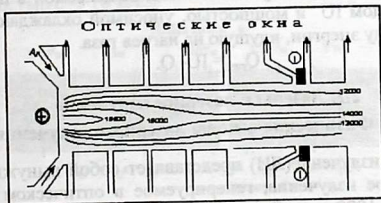
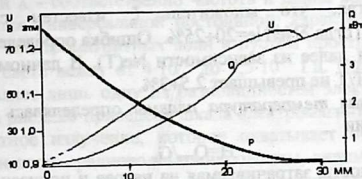
Связь между абсолютной интенсивностью континуума и температурой плазмы устанавливалась по формуле

$$\epsilon_{\lambda} = 6,36 \cdot 10^{-47} n_e^2 (kT)^{-1/2} \xi c / \lambda^2 \Delta \lambda,$$

где n_e^2 - концентрация электронов, $\xi = 2,5$ - множитель, учитывающий специфику термов сложного атома, c - скорость света, k - постоянная Больцмана и T - температура плазмы. После подстановки значений постоянных выражение принимает вид

$$\epsilon_{\lambda} = 6,36 \cdot 10^{-19} n_e^2 T^{-1/2}.$$

По этой формуле рассчитывалась зависимость абсолютной интенсивности континуума от температуры. Затем, пользуясь экспериментальными значениями интенсивности континуума, находилось распределение температуры по радиусу в различных сечениях электрической дуги. При нахождении температуры рассчитывался состав плазмы с учетом понижения энергии ионизации по Гриму и для каждого сечения дуги - с учетом измеренного статического давления. Таким образом, на основе спектроскопических измерений были найдены радиальное распределение температуры в сечениях дуги на различном расстоянии от анода. Изотермы приведены на рис 2.18.



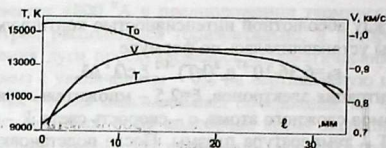


Рис. 2.18. Схематический разрез плазматрона. Результаты измерений и расчетов.

Погрешность измерений температуры определяется систематическими и случайными ошибками. К случайным ошибкам отнесены все ошибки, которыми обусловлены воспроизводимостью измерений интенсивности континуума. К систематическим ошибкам отнесены; неточность определения ξ , погрешность расчета состава плазмы (n_e) и ошибки при измерении температуры эталонного источника. Абсолютная интенсивность континуума связана с температурой плазмы через концентрацию электронов. Ошибка нахождения концентрации электронов может быть выражена как

$$\frac{\delta N_e}{N_e} \approx 0,5 \left(\frac{\Delta \xi}{\xi} + \frac{\Delta \xi}{\xi} \right).$$

Предполагая, что множитель ξ известен с точностью $\delta \xi / \xi = 15 \div 20\%$. Тогда $\delta N_e / N_e = 20 \div 25\%$. Ошибка определения температуры находится далее из зависимости $N_e(T)$. В данном случае, при $\delta N_e / N_e = 25\%$, $\delta T / T$ не превышает $2,5 \div 3\%$.

д) Среднемассовая температура плазмы определялась по полному потоку энтальпии

$$H = Q_{\text{газ}} / G,$$

где $Q_{\text{газ}}$ — мощность, затрачиваемая на нагрев и ионизацию газа; G — расход газа. Разность между мощностью, выделяемой в плазматроне дугowym разрядом IU и мощностью, уносимой охлаждающей водой Q дает величину энергии, идущую на нагрев газа.

$$Q_{\text{газ}} = IU - Q.$$

2.2. Лазеры и лазерное излучение

2.2.1. Физические основы лазерного излучения

Лазерное излучение (ЛИ) представляет собой вынужденное монохроматическое излучение, генерируемое в оптическом диапазоне длин волн $0,1 \dots 1000$ мкм. Отличие его от других видов излучения заключается в монохроматичности, когерентности и высокой степени

направленности. Благодаря малой расходимости луча лазера плотность потока мощности может достигать $10^{16} \dots 10^{17} \text{ Вт/м}^2$.

Свет является электромагнитной волной (рис.2.19), которая характеризуется вектором напряженности электрического \vec{E} и магнитного поля \vec{H} .

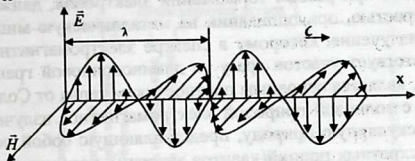


Рис. 2.19. Свет - электромагнитная волна.

Свету соответствовал диапазон длин волн от $4 \cdot 10^{-7}$ до $7,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, или от 400 до 750 нм. Соответствующие частоты можно найти из формулы:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (2.51)$$

Здесь ν и λ - соответственно частота и длина волны. Скорость света c является универсальной постоянной, характеризующее распространение электромагнитных волн в пустом пространстве, частоты видимого света лежат от $4 \cdot 10^{14}$ до $7,5 \cdot 10^{14}$ Гц. Однако видимый свет представляет лишь одну из разновидностей электромагнитного излучения, на рис.2.20 приведена шкала электромагнитных волн, или электромагнитное излучение, которое охватывает очень широкий диапазон длин волн - радиоволны, микроволны, видимый свет, рентгеновское и гамма- излучение: все они распространяются в пространстве со скоростью $c=3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.



Рис. 2.20. Основные участки спектра частот(длин волн) электромагнитных колебаний.

Радиоволны и микроволны генерируются с помощью электронных устройств. Волны с более высокими частотами при помощи электроники получить крайне трудно. Эти и другие типы электромагнитного излучения испускаются в ряде естественных процессов, таких как излучение атомов, молекул, атомных ядер. Рентгеновское излучение испускается при резком торможении электронов, движущихся с большой скоростью, при попадании на металлическую мишень. Инфракрасное излучение, которому в спектре электромагнитного излучения соответствует участок сразу за длинноволновой границей видимого света, является основным переносчиком тепла от Солнца.

Наряду с волновой природой электромагнитное излучение проявляет корпускулярную природу, представляющую собой последовательность дискретных порций (квантов энергии), которые называются фотонами.

$$\text{Энергия фотона } \varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}. \quad (2.52)$$

Где $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - постоянная Планка.

Волновая природа света проявляется в явлениях дифракции и интерференции, а в явлениях, обусловленных эффектами поглощения света атомными или молекулярными системами (например, явление фотоэффекта) преобладает квантовая природа света. Для характеристики излучения можно использовать энергию фотона (таблица 2.5).

Таблица 2.5

Единица измерения	Длина волны, мкм	Частота, Гц	Единица измерения	Волновое число, см ⁻¹	Энергия фотона, эВ
Мкм	1	3,33·10 ¹⁸	Мкм	1·10 ⁴	0,81
Гц	3·10 ¹⁴	1	Гц	3,33·10 ¹¹	4,14·10 ⁻¹⁵
См ⁻¹	1·10 ⁴	3·10 ¹⁰	См ⁻¹	1	1,24·10 ⁻⁴
эВ	1,23	2,42·10 ⁻¹⁴	эВ	8,07·10 ³	1

На рис.2.21, приведены длины волн излучения наиболее распространенных лазеров[50]. Используемые на практике лазеры генерируют излучение с длиной волны $\lambda = 0,3 + 10,6 \text{ мкм}$.

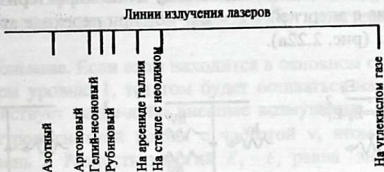
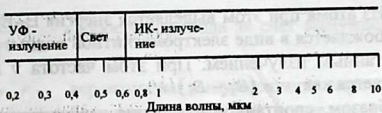


Рис.2.21. Длины волн излучения наиболее распространенных лазеров.

Длины волн излучения наиболее распространенных лазеров: азотный (ультрафиолетовый) – излучение с $\lambda = 0,3371$ мкм; аргоновый – излучение с несколькими длинами волн в сине-зеленой области спектра; гелий-неоновый – излучение с $\lambda = 0,6328$ мкм; на арсениде галлия – излучение в ближней ИК области с $\lambda = 0,85 \div 0,9$ мкм; рубиновый – излучение с $\lambda = 0,6943$ мкм; на стекле с неодимом- излучение в ближней ИК области с $\lambda = 0,1,06$ мкм; лазер на CO_2 – излучение в дальней ИК области с $\lambda = 10,6$ мкм;

Принцип действия лазеров связан с понятием энергетических уровней – значений энергии атома, молекулы и других квантовых систем, состоящих из электронов, ядер, атомов и т.д. подчиняющимся квантовым законам, характерным для микромира.

В работе лазера используются три фундаментальных явления, которые происходят при взаимодействии электромагнитных волн с веществом - процессы спонтанного и вынужденного излучения и процесс поглощения. Рассмотрим данные процессы подробно.

1. **Спонтанное излучение.** Известно, что испускание света происходит, когда электрон в атоме переходит из одного стационарного состояния в другое с меньшей энергией. При каждом переходе испускается один фотон, энергия которого определяется соотношением:

$$h\nu = E_m - E_n .$$

Здесь E_m , E_n – энергии верхнего и нижнего состояния соответственно.

В случае, когда $m=2$, $n=1$ и $E_2 > E_1$, атом находится первоначально в состоянии, соответствующем уровню 2 и стремится перейти

на уровень 1. Из атома при этом выделяется энергия $E_2 - E_1$. Когда эта энергия высвобождается в виде электромагнитной волны, процесс называется спонтанным излучением. При этом частота ν излученной волны определяется как $\nu = (E_2 - E_1)/h$.

Таким образом, спонтанное излучение характеризуется испусканием фотона с энергией $h\nu = E_2 - E_1$ при переходе атома с уровня 2 на уровень 1 (рис. 2.22а).

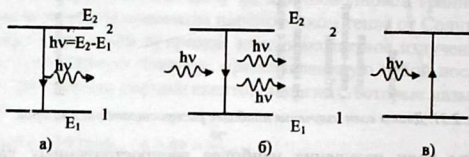


Рис. 2.22. Схематическое представление трех процессов. а) – спонтанное излучение, б) – вынужденное излучение, в) – поглощение.

Вероятность спонтанного излучения определяется:

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{сп}} = -AN_2 \quad (2.53)$$

Здесь N_2 – число атомов (в единице объема), находящихся на уровне 2 в момент времени t . $\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{сп}}$ – скорость перехода этих атомов вследствие спонтанного излучения на нижний уровень. A – представляет собой вероятность спонтанного излучения и называется коэффициентом Эйнштейна.

2. **Вынужденное излучение.** Если атом первоначально находится на верхнем уровне 2 и на вещество падает электромагнитная волна с частотой ν , равной частоте спонтанно испущенной волны, то разность энергий $E_2 - E_1$ выделится в виде электромагнитной волны, которая добавится к падающей (Рис. 2.22б). Это явление является вынужденным излучением. В случае спонтанного излучения атом испускает электромагнитную волну, фаза которой не имеет определенной связи с фазой волны, излученной другим атомом. Испущенная при этом волна может иметь любое направление распространения. В случае же вынужденного излучения фаза излученной волны совпадает с фазой падающей волны. Уравнение вынужденного излучения:

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{вын}} = -W_{21}N_2 \quad (2.54)$$

Где $\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{вын}}$ - скорость перехода за счет вынужденного излучения.

$W_{21} = \sigma_{21} F$ - вероятность вынужденного перехода. Здесь F - плотность потока фотонов в падающей волне, а σ_{21} - величина, имеющая размерность площади и зависящая от характеристик данного перехода.

3. Поглощение. Если атом находится в основном состоянии, соответствующем уровню 1, то атом будет оставаться на нем пока на него не подействует какое-либо внешнее возмущение. При падении на атом электромагнитной волны с частотой ν , атом перейдет на верхний уровень 2. Разность энергий $E_2 - E_1$ равна энергии падающей электромагнитной волны. Это является процессом поглощения (Рис.2.22в).

Вероятность поглощения определяют по формуле:

$$\frac{dN_1}{dt} = -W_{12} N_1 \quad (2.55)$$

где N_1 - число атомов в единице объема, которые в данный момент находятся на уровне 1. $W_{12} = \sigma_{12} F$.

Вероятности вынужденного излучения и поглощения равны друг другу, поэтому $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma$

Число атомов в единице объема, находящихся на данном энергетическом уровне называют населенностью этого уровня.

2.2.2. Принцип работы лазера

Рассмотрим среду, которая состоит из атомов, находящихся в двух произвольных уровнях 1 и 2 с соответствующими населенностями N_1 и N_2 . Пусть в этой среде в направлении оси z распространяется плоская волна с интенсивностью, соответствующей плотности потока фотонов F . Тогда в соответствии с выражениями (2.54) изменение плотности потока dF , обусловленное процессами вынужденного излучения и поглощения в слое dz (область на рис.2.18) определяется уравнением:

$$dF = \sigma \cdot F (N_2 - N_1) dz \quad (2.56)$$

Из уравнения следует, что в случае $N_2 > N_1$ среда ведет себя как усиливающая ($\frac{dF}{dz} > 0$), а в случае $N_2 < N_1$ как поглощающая (Рис 2.23). Известно, что при термодинамическом равновесии населенности энергетических уровней описываются статистикой Больцмана.

Если N_1^* и N_2^* - населенности двух уровней при термодинамическом равновесии, то мы имеем[51]:

$$\frac{N_2^*}{N_1^*} = \exp[-(E_2 - E_1)/kT], \quad (2.57)$$

где k - постоянная Больцмана, а T - абсолютная температура среды. Таким образом, в случае термодинамического равновесия $N_2 < N_1$. Т. е. среда поглощает излучение на частоте ν . Если удастся достигнуть неравновесного состояния, для которого $N_2 > N_1$, то среда будет действовать как усилитель. В этом случае в среде существует **инверсия населенностей**. Среду, в которой достигнута инверсия населенностей называют **активной средой**.

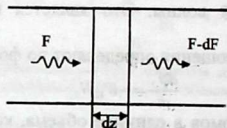


Рис. 2.23. Изменение плотности потока фотонов dF .

Если частота перехода $\nu = (E_2 - E_1)/h$ попадает в СВЧ-диапазон, то соответствующий усилитель называется **мазером**. Слово **мазер** (от англ. maser) образовано из начальных букв слов следующей фразы «**Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation**». Если частота перехода ν соответствует оптическому диапазону, то усилитель называют **лазером**. **Лазер** - это термин - аббревиатура, составленная из начальных букв английской фразы «**Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation**». В переводе это означает «усиление света с помощью вынужденного излучения». «Вынужденность» излучения состоит в том, что оно возникает после стимуляции атомов рабочего вещества внешним электромагнитным полем. Слово **лазер** широко используется не только для частот видимого диапазона, но и для частот, лежащих в ближнем и дальнем ИК-, УФ- и даже в рентгеновском диапазонах.

Лазеры являются наиболее распространенными и наиболее перспективными квантовыми приборами. Обычно под лазерами понимают квантовые автогенераторы, причем блок-схема практически любого такого генератора может быть представлена схемой, приведенной на рис. 2.24, где АС - активная среда (твердое тело, газ, жидкость, плазма и др.); ИА - источник активации, служащий для возбуждения

АС (оптическая накачка, электрический разряд, электронный пучок, химическая реакция и др.), причем такое возбуждение может быть импульсным, непрерывным или комбинированным, причем не только по времени возбуждения, но и по способам; 31 и 32 – зеркала, образующие открытый резонатор, УЭ - управляющий элемент, обычно расположенный внутри лазера и служащий для реализации того или иного характерного именно для лазеров режима их работы (селекция мод, модуляция добротности, перестройка по частоте, синхронизация мод).

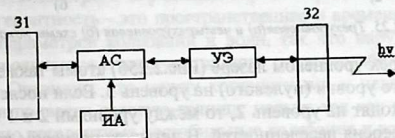


Рис. 2.24. Схема генератора лазерного излучения

За счет многократного отражения в системе зеркал излучение усиливается, и в итоге мы получаем явление, физические свойства которого не имеют аналогов в природе. Лазерное излучение формирует узкие световые пучки с очень большой мощностью. В зависимости от типа АС и УЭ, т.е. от типа лазера и режима его работы, лазерное излучение может существенно изменяться.

Схемы накачки

Лазеры различаются в основном по видам накачки. Накачкой могут служить: электромагнитное излучение с длиной волны, отличающейся от лазерной; электрический ток; пучок релятивистских (чрезвычайно быстрых) электронов; электрический разряд; химическая реакция в пригодной для генерации среде. Рассмотрим, каким образом в данной среде можно получить инверсию населенностей. Используя только два уровня, невозможно получить инверсию населенностей.

В трехуровневом лазере (рис. 2.25) атомы каким-либо способом переводятся из основного уровня на уровень 3. Если выбрана среда, в котором атом, оказавшийся в возбужденном состоянии на уровне 3 быстро переходит на уровень 2, то в такой среде можно получить инверсию населенностей между уровнями 2 и 1.

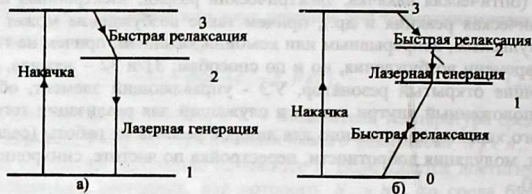


Рис.2.25. Трехуровневая(а) и четырехуровневая (б) схемы накачки.

В четырех уровневом лазере (Рис.2.25б) атомы также переводятся с основного уровня (нулевого) на уровень 3. Если после того атомы быстро переходят на уровень 2, то между уровнями 2 и 1 может быть получена инверсия населенностей. В четырехуровневом лазере атомы в процессе вынужденного излучения переходят с уровня 2 на уровень 1. Для непрерывной работы четырехуровневого лазера необходимо, чтобы частицы, оказавшиеся на уровне 1 очень быстро переходили на нулевой уровень.

Процесс, под действием которого атомы переводятся с уровня 1 на уровень 3 (в трехуровневой схеме) или с уровня 0 на уровень 3 (в четырехуровневой схеме), называется накачкой.

Следует отметить, что если верхний уровень накачки пуст, то скорость, с которой верхний лазерный уровень 2 станет заселяться с помощью накачки $\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_p$ в общем случае можно написать:

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_p = W_p N_g \quad (2.58)$$

Здесь N_g - населенность основного уровня. W_p - коэффициент, который называется скоростью накачки.

2.2.3. Свойства лазерного излучения

Лазерное излучение характеризуется рядом уникальных свойств. К их числу относятся большая интенсивность электромагнитной энергии, высокая монохроматичность, значительная степень временной и пространственной когерентности.

1. Монохроматичность. Это свойство определяется двумя обстоятельствами: в лазерах усиливаться может электромагнитная волна только определенной частоты ν (или длины волны) и генерация может

возникнуть на резонансных частотах, что приводит к тому, что ширина линии лазерного излучения гораздо уже (примерно на шесть порядков), чем обычная ширина линии при спонтанном излучении.

2. Когерентность. Для любой электромагнитной волны можно определить временную и пространственную когерентность. Когерентность — это согласованное протекание во времени и в пространстве всех колебательных и волновых процессов, когда амплитуда, частота, направление движения волны и ее поляризация либо постоянны, либо меняются по строго определенному закону. Можно также сказать, что когерентность — это пространственная и временная стабильность всех параметров колебаний и волн, так что нарушение когерентности проявляется в наличии разного рода нестабильности этих параметров. Очевидно, что между когерентными и некогерентными колебаниями провести строгую границу нельзя, так как всегда могут быть частично когерентные нестабильные колебания и волны. Строго степень когерентности описывается корреляционными функциями, а экспериментально — определяется по наблюдению интерференционной картины. Дело в том, что источники колебаний дают волновую интерференционную картину лишь в том случае, если они когерентны, причем линии максимальной амплитуды являются гиперболами. Различают когерентность временную и пространственную. Временная когерентность определяется коэффициентом автокорреляции волн, испущенных из одной точки с координатой R в различные моменты времени. Пространственная когерентность определяется взаимной корреляционной функцией волн, испущенных в одно и то же время из двух различных точек с координатами R_1 и R_2 . Различные источники оптического излучения по степени уменьшения когерентности располагаются в следующем порядке: газовые лазеры имеют самую большую степень когерентности, затем идут жидкостные лазеры, твердотельные лазеры на диэлектриках, полупроводниковые лазеры, газоразрядные лампы, светодиоды, лампы накаливания.

3. Направленность излучения, определяемая углом его расходимости. Это свойство появляется из-за направленного движения квантов излучения вдоль оси резонатора (Рис.2.25). Часть фотонов испускается внутри трубки резонатора не параллельно ее оси. Такие фотоны покидают прибор через боковую поверхность трубки и не дают вклада в основной пучок.

4. Поляризация. Электромагнитные волны называются поляризованными, если направление векторов сохраняется неизменным в пространстве или изменяется по определенному закону. Различают линейно-поляризованное, поляризованное по кругу и эллиптически

поляризованное излучение. С квантовой точки зрения поляризация объясняется выполнением правил отбора при излучении фотона, так что фотон может иметь магнитное квантовое число $m_j = 0 \pm 1$, соответствующее его магнитному моменту, а также спин, направленный противоположно этому моменту и имеющий строго дискретную ориентацию в пространстве, что и определяет анизотропию поляризации фотона. Так, если $m_j = 0$, то излученный квант не имеет спина и линейно поляризован, если $m_j = +1$, то спин направлен в сторону движения фотона и излучение имеет правую круговую поляризацию, если $m_j = -1$ спин направлен в другую сторону и излучение имеет левую круговую поляризацию. В зависимости от того, какие кванты когерентного излучения преобладают, будет тот или иной характер поляризации всего излучения. Если излучение не когерентно - говорить о поляризации не приходится, и такой свет называют естественным, но его можно сделать поляризованным с помощью поляризаторов.

5. Мощность излучения. Наибольшие импульсные мощности $P_{\text{и}} \approx 1015$ Вт, а наибольшие непрерывные (или средние для импульсно-периодического излучения) $P_{\text{ср}} \approx 107$ Вт, причем плотность излучения достигает 1021 Вт/см².

6. Длительность импульса излучения. Минимально достижимые импульсы имеют $t = 10^{-4}$ с, т.е. имеют протяженность в пространстве $l = 3-4$ см.

7. Квантовая эффективность лазерного перехода – отношение энергии квантов сигнала к энергии квантов накачки - определяет максимальный возможный КПД лазера.

8. КПД лазера бывает физический и полный. Под физическим КПД понимается отношение энергии излучения к энергии, поглощаемой активным элементом лазера. Полный КПД – отношение энергии излучения ко всей энергии, затраченной системой. Параметры монохроматичность, направленность излучения, мощность излучения и длительность импульса излучения – уникальны, характерны именно для лазеров и не имеют аналогов среди других источников излучения. Параметры лазерного излучения позволяют использовать лазеры в промышленных целях (лазерная резка, сварка, сверление и т.п.).

2.2.4. Тепловые модели нагрева и поверхностного испарения металлов под действием лазерного излучения

При воздействии лазерного излучения на твердое тело создаются условия для скачкообразного изменения температуры на его поверхности. Возникновение за малые промежутки времени больших

градиентов температур способно вызвать сложные физические явления, связанные с движением паров, образованием плазмы, поглощением энергии продуктами разрушения, нагревание тела, фазовыми переходами, движением поверхности, на которой происходит испарение. Анализ теплофизических явлений, протекающих в материале при воздействии лазерного излучения, имеет значение для совершенствования лазерной технологии обработки материалов. Сложность анализа заключается в том, что рассматриваемые явления весьма многообразны и влияют друг на друга. Нелинейность теплофизических характеристик материала, многие из которых слабо изучены, настолько усложняют задачу, что ее решение в общем виде в настоящее время представляется практически невозможным. Наиболее эффективный путь состоит в разбиении общей задачи на ряд частных, которые и необходимо подвергнуть анализу. Используя принципы теории источников тепла[52] можно свести многообразные реальные случаи нагрева материалов ЛИ к некоторым схемам, охватывающим основные особенности процессов нагрева. Изделия, нагреваемые источниками теплоты, в зависимости от их формы и размеров могут рассматриваться как полуограниченные, ограниченные и многослойные тела.

Особенности постановки задач нагрева материалов ЛИ определяют выбор методов их решения. Используются следующие аналитические методы для решения линейных задач теплопроводности: источников (функций Грина), Фурье, конечных и бесконечных интегральных преобразований по пространственным переменным, преобразования Лапласа по временной переменной, теории обобщенных функций и т.д.[53].

Уравнение теплопроводности, краевые условия.

В общем случае для полу бесконечного тела уравнение теплопроводности, записанное в прямоугольной системе координат x, y, z для неподвижного источника теплоты имеет вид:

$$\frac{\partial(c\gamma T)}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad}T) + q_v, \quad (2.59)$$

где теплофизические характеристики c (удельная теплоемкость), γ (плотность) и λ (теплопроводность) являются функциями температуры, т.е. зависят от пространственных координат и времени; q_v - источник, действующий в объеме тела (объемный), который в общем случае зависит от температуры.

В практических случаях представляет интерес изотропные системы, свойства которых одинаковы по всем направлениям, с постоянными теплофизическими коэффициентами, у которых объемный источник теплоты не зависит от температуры. В этом случае уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + q_v. \quad (2.60)$$

где $a = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma}$ - коэффициент температуропроводности.

При воздействии ЛИ на металлы и ряд других непрозрачных материалов источник теплоты является поверхностным и q_v в уравнении обращается в нуль.

Одномерная модель нагрева

Уравнение теплопроводности для полу бесконечного тела в одномерном случае с начальными и граничными условиями имеет вид [6]:

$$T = 0|_{r, z \rightarrow \infty}; \quad T = 0|_{t=0}, \quad (2.61)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = q_0|_{z=0} = A \varphi(t) q(r), \quad (2.62)$$

где плотность потока q_0 на поверхности тела в общем случае является функцией не только от координат, но и температуры. В большинстве практических случаях задача теплопроводности является осесимметричной, т.е. уравнение и граничные условия могут быть записаны в цилиндрической системе координат.

Используя преобразование Лапласа по t , можно получить решение задачи в виде:

$$T(z, t) = \left\{ \frac{A q_0}{c \cdot \gamma (\pi a)^{1/2}} \right\} \cdot \int_0^t \varphi(t - \xi) \xi^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{4a\xi}\right) d\xi, \quad (2.63)$$

где q_0 - плотность потока; ξ - переменная интегрирования.

Для упорядоченного режима работы лазера с учетом временной зависимости импульса ЛИ:

$$T(x, t) = q_0 \lambda^{-1} \sqrt{a} \left\{ \sqrt{t} \cdot \operatorname{ierfc}(z/2\sqrt{at}) - 2^{-1} \pi^{-1/2} \int_0^t \cos[\omega(t - \xi)] \cdot \exp(-z^2/4a\xi) \xi^{-1/2} d\xi \right\}, \quad (2.64)$$

где ω - частота следования пиков.

Первое слагаемое в соотношении описывает нагрев полу бесконечного тела непрерывно действующим источником теплоты с плотностью потока $q_0/2$, а второе – понижение температуры, обусловленное колебательным характером временной структуры источников теплоты. Оценка второго члена в уравнении при различных ω , z и t может быть выполнена численными методами.

Для квазистационарного режима генерации импульсного лазера при

$$t < \tau: \quad T(z, t) = (2q_0 \sqrt{at} / \lambda) \cdot \text{ierfc} \left[z / (2\sqrt{at}) \right]. \quad (2.65)$$

Функция $\text{ierfc}(x)$, входящая в соотношения, представляет собой интеграл от функции интеграла вероятности:

$$\text{ierfc}(x) = \int_x^{\infty} \text{erfc}(x) dx = \left(1/\pi^{1/2} \right) e^{-x^2} - x \cdot \text{erfc}(x), \quad (2.66)$$

и она спадает с увеличением аргумента x более резко, чем $\text{erfc}(x)$. Эффективная толщина теплового влияния ограничена параметром

$$(z/2\sqrt{at}) \approx 1,6. \quad (\text{ierfc} 1,6 \approx 10^{-2}). \quad (2.67)$$

Например, для железа ($a = 5 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$) при $r_f = 5 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ в момент времени t^* ($t^* \ll \tau$)/ $a = 2,5 \cdot 10^4 \text{ с}$) глубина проникновения теплоты составляет около 50 мкм.

Градиент температуры. Выражение для градиента температуры при нагреве полу бесконечного тела источником теплоты с постоянной плотностью, получим, продифференцировав (2.65) по z ,

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial z} = \left(-\frac{q_0}{\lambda} \right) \cdot \text{erfc} \left[\frac{z}{2\sqrt{at}} \right]. \quad (2.68)$$

Градиент температуры тем выше, чем больше отношение q_0/λ , и в большей степени зависит от автомодельной переменной $z/(2\sqrt{at})$. Если $t \rightarrow \infty$ или $z=0$, градиент температуры имеет постоянное значение:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial z} = \left(-\frac{q_0}{\lambda} \right). \quad (2.69)$$

Кривые распределения градиента температуры по глубине z для стали ШХ15 и различных значений q_0 представлены на рис. 2.26. Из расчетов следует, что на поверхности тела градиент температуры мо-

жет достигать весьма больших значений. Так, для меди при $q_0 = 10^8 \text{ Вт/см}^2$ $\partial T(0,t)/\partial z = 3 \cdot 10^5 \text{ К/см}$, при $q_0 = 10^7 \text{ Вт/см}^2$ $\partial T(0,t)/\partial z = 3 \cdot 10^4 \text{ К/см}$.

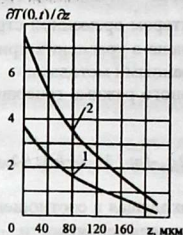


Рис. 2.26. Распределение градиента температуры по глубине полубесконечного тела (сталь ШХ15, $\tau = 1 \text{ мс}$).

Зная температурное поле материала, можно оценить глубину тела d , эффективно нагретую источником теплоты, - глубину зоны термического влияния. Для качественных оценок можно с помощью * получить соотношение $d \approx 4\sqrt{at}$, где d - глубина зоны термического влияния. Например, для стали $a = 0,1 \text{ см}^2/\text{с}$ и при $t = 10^{-2} \text{ с}$ получим $d = 4 \cdot 10^{-2} \text{ см}$.

Одномерная модель нагрева при движущемся источнике теплоты

Если пятно нагрева ЛИ радиусом r_f перемещается по поверхности с постоянной скоростью v , то действие источника теплоты будет приводить к повышению температуры. После некоторого периода времени, длительность которого зависит от свойств материала, устанавливается квазистационарное состояние, при котором нагретая зона постоянного размера перемещается вместе с источником теплоты [52-57].

Для расчета температуры в около шовной зоне при сварке чаще всего используют схему нормально-кругового источника теплоты с эффективной мощностью P_0 , перемещающегося с постоянной скоростью v в направлении оси Ox по поверхности пластины толщиной δ и полу бесконечного тела. Коэффициент сосредоточенности k и скорость v остаются постоянными в течение всего времени перемещения источника теплоты.

Нагрев пластины. Уравнение для расчета температуры в точке $A(x,y)$ в подвижной системе координат, связанной с источником теплоты, имеет вид [52]:

$$T(x,y,t) = \left[P_0 e^{-\nu x / (2a) + \delta t_0} / (2\pi\lambda\delta) \right] \cdot K_0 \rho_2 [\psi_2(\rho_2, \tau + \tau_0) - \psi_2(\rho_2, \tau_0)]. \quad (2.70)$$

Здесь t – время, отсчитываемое от момента прохождения центра нормально-кругового источника теплоты через перпендикулярное к оси Ox сечение пластины, в котором находится рассматриваемая точка $A(x,y)$; $b=2a/(c\gamma\delta)$; $t=1/(4ak)$; $K_0(\rho_2)$ – функции Бесселя от мнимого аргумента второго рода нулевого порядка; $\rho_2 = r\sqrt{\nu^2/(4a^2 + b/a)}$ – безразмерный критерий расстояния r точки $A(x,y)$ от начала подвижных координат; $\Psi_2(\rho_2, \tau + \tau_0)$ и $\Psi_2(\rho_2, \tau_0)$ – коэффициенты теплонасыщения для плоского процесса распространения теплоты, где $\tau = [b + \nu^2/(4a)]t$ – безразмерный критерий времени t , $\tau_0 = [b + \nu^2/(4a)]t_0$ – безразмерный критерий постоянной времени t_0 .

Основные положения тепловой модели процесса испарения

При относительно небольших значениях плотности потока энергии для описания кинетики поверхностного испарения используется так называемая тепловая модель, [58], основанная на решении уравнения теплопроводности для области с движущейся границей раздела фаз с соответствующими краевыми условиями. Изучение поверхностного испарения имеет в определенной степени основополагающий характер, поскольку с него начинается большинство других процессов. Знание температурного поля в испаряющемся металле необходимо для определения термических напряжений, оценки давления на поверхности раздела фаз, анализа кинетики роста пузырьков при кипении и др. Поэтому развитие тепловой модели испарения создает предпосылки для более точного количественного анализа перечисленных явлений.

В рамках тепловой модели процесс испарения рассматривается как задача о движении границы конденсированная фаза – пар. В простейшей одномерной постановке формулировка задачи имеет следующий вид [59]:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.71)$$

$$-\chi \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=y(t)} = q - \nu Q \quad (2.72)$$

$$T(\infty, t) = T_\infty \quad (2.73)$$

Здесь $T(x, t)$ - температурное поле, q - плотность потока энергии, a , χ и Q - соответственно теплопроводность, теплопроводность и теплота испарения единицы объема металла, $y(t)$ - закон изменения со временем координаты поверхности испарения, $v \equiv y'$ - скорость перемещения движущейся границы раздела фаз.

В квазистационарном приближении

($v = v_0 = \text{const}$; $T(y, t) = T_\infty = \text{const}$) решение задачи (2.71-2.73) имеет вид:

$$T(x, t) = T_\infty + T_u \exp[(v_0 \cdot a^{-1})] \quad (2.74)$$

$$v = q[Q + c(T_u - T_\infty)]^{-1} \quad (2.75)$$

где c - теплоемкость единицы объема металла, T_u - температура поверхности испарения.

Данная тепловая модель имеет определенные ограничения применимости, которые связаны с учетом жидкой фазы, экранировки излучения продуктами испарения, образование плазмы и др.

При устойчивом режиме испарения на поверхности материала образуется и перемещается вглубь каверна, представляющая собой фазовую поверхность испарения. Одномерная модель развития каверны, имеющего форму цилиндра, рассмотрена в работах [58-61], где показано, что при больших временах экспозиций скорость углубления каверны уменьшается со временем. Такая модель дает возможность оценить глубину реза, но не определяет форму, ширину, объем реза и энергоемкость разрушения. Поскольку дно реальной лунки в испаряющемся материале не является плоским, данная модель не была в состоянии описать особенности испарения, связанных с его не одномерностью. Более сложная квазистационарная модель задачи о развитии в виде параболоида вращения, которая перемещается в глубину материала с постоянной скоростью v [62-65], позволила провести анализ кинетики процесса испарения от формы испаряющейся поверхности. Решение квазистационарной задачи углубления каверны для трехмерной области с переменной скоростью углубления каверны $v(t)$ получено в виде функции от одного аргумента u [69-70]:

$$u = \frac{1}{\rho} \left[z - \int_0^t v dt + \sqrt{\left(z - \int_0^t v dt \right)^2 + r^2} \right] \quad (2.76)$$

где r - радиус кривизны вершины каверны, t - время облучения. Подставив (2.76) в уравнение теплопроводности и полагая, что теплофизические константы материала не зависят от температуры $T(u)$ можно получить решения для температурного поля в материале и $v(t)$:

$$T(u) = T_\infty + (T_\phi - T_\infty) \cdot E(\alpha - \beta u) / E(\alpha - \beta) \quad (2.77)$$

$$\beta(t) = \frac{\rho v(t)}{2a}; \quad f(\beta) = -\frac{e^{-\beta}}{\beta E i(-\beta)}; \quad v(t) = \frac{v_{\max}}{1 + \rho f(\beta)}. \quad (2.78)$$

Здесь T_{ϕ} и T_{∞} соответственно температуры фазовой поверхности и окружающей среды, v_{\max} — максимально возможная скорость углубления каверны.

Уравнение (2.77) описывает установившиеся и меняющиеся температурные поля в системе обобщенной пространственно-временной координаты u . Температурные поля, рассчитанные по данной модели показали, что с удалением от каверны температурные изотермы быстро падают, а вблизи нее наблюдаются большие градиенты температур.

Моделирование процессов газолазерной резки

Для описания реальной картины газолазерной резки металлов рассматривается ряд сопряженных задач тепломассообмена: тепловое воздействие лазерного излучения с поверхностью металла; образование расплава и его течение в виде тонкой жидкой пленки; истечение газовой струи, ее динамическое взаимодействие с расплавленным металлом; распространение тепла в твердом теле и плавление материала. Решение указанных задач в полной постановке представляется чрезвычайно затруднительным.

Схема процесса резки

Процесс лазерной резки (рис. 2.27-2.28) [66] характеризуется одновременным воздействием на разрезаемый материал сфокусированного линзой или объективом лазерного излучения и вспомогательного газа, в результате которого образуется в материале узкий разрез. Синхронно перемещению лазерного резака по всей толщине обрабатываемого материала движется нагретая до определенной температуры наклонная поверхность разрушения (передняя поверхность реза).

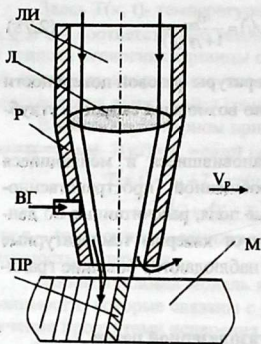


Рис.2.27 Схема процесса резки: ЛИ- лазерное излучение; Л-линза; Р-резак; М- материал; ПР- поверхность разрушения; ВГ- вспомогательный газ

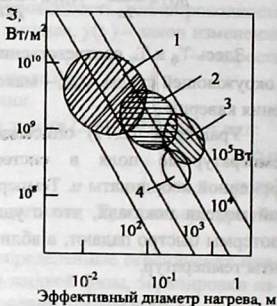


Рис.2.28. Энергетические параметры различных источников нагрева: 1 - лазерный; 2 - электронно-лучевой; 3 - плазменный; 4 - газоплазменный.

2.2.5. Теплофизические процессы в зонах обработки материалов ЛИ

При воздействии ЛИ на поверхность тел часть потока энергии частично отражается от поверхности, а остальная часть поглощается в тонком поверхностном слое вещества, вызывая ее нагрев, последующее плавление и испарение в зависимости от условий обработки.

В рамках тепловых процессов обычно используют два типа пространственного распределения плотности потока: нормальное (гауссовское) и равномерное по пятну нагрева радиусом r_f . Для нормального распределения потока справедливо равенство

$$q(r) = q_0 \cdot e^{-kr^2} \quad (2.79)$$

где q_0 - максимальная плотность потока, k - коэффициент сосредоточенности, см^{-2} , определяющий степень остроты пространственного распределения источников теплоты.

Для равномерного распределения плотности потока по пятну нагрева радиусом r_f

$$q(r) = \begin{cases} q_0 & r_f \geq r \geq 0; \\ 0 & r > r_f. \end{cases} \quad (2.80)$$

Характер физических явлений на передней поверхности реза определяется плотностью мощности светового потока. С повышением плотности мощности растет температура передней поверхности реза и средняя скорость ее перемещения. По сравнению с традиционными источниками тепла, которые используются в процессах кислородной, плазменной и электронно-лучевой обработки, сфокусированный лазерный луч обеспечивает на один — полтора порядка более высокую плотность энергии, передаваемой аномально малой площади воздействия. Такой световой поток за доли секунды не только расплавляет, но и частично испаряет поверхность любого, даже самого тугоплавкого, материала. В процессе резки падающий на материал световой поток частично поглощается поверхностью материала, расплавленной пленкой и боковыми поверхностями реза, частично отражается. При большой плотности энергии часть излучения поглощается образующимися продуктами разрушения материала, вследствие чего снижается эффективность резки. Поглощательная способность конкретного металла зависит от длины волны, поляризации и угла падения излучения на поверхность. Она увеличивается при расплавлении и окислении металла, при увеличении толщины металла и может достигать $\geq 80\%$. В литературе отсутствуют конкретные коэффициенты поглощения применительно к многообразным условиям резки.

Характер физических явлений в разрезе зависит от относительного энерговклада лазерного и химического тепловых источников. При высокой плотности мощности излучения резка идет с заметным испарением (сублимацией) материала, газ выполняет в основном функцию удаления из разреза продуктов разрушения. В этом случае скорость и качество резки определяются параметрами излучения. Если энерговклад химического источника сопоставим с лазерным или превышает его, то процесс резки идет в режиме плавления с экзотермическим окислением расплавленного металла на передней поверхности реза. В этом случае скорость и качество ниже и определяются параметрами химического источника тепла и процесс мало чем отличается от процесса кислородной резки стали.

При резке металлов механизм разрушения может быть стационарным, когда по всей длине канала реза существует ванна расплава, и нестационарным (неустановившимся), характеризующимся периодическим выносом расплавленного металла из полости реза. На практике имеет место нестационарный механизм.

Использование вспомогательного газа позволяет заметно снизить удельные затраты энергии излучения благодаря более интенсивному удалению из полости реза продуктов разрушения. При резке металлов применяют в основном кислород. На лобовой поверхности реза выделяется дополнительная теплота в результате окисления металла. Образуется оксидная пленка, которая значительно повышает коэффициент поглощения излучения. Применение импульсно-периодического излучения позволяет снизить удельные затраты энергии излучения, а также существенно повысить качество резки. Назначая определенные параметры излучения (пиковую мощность, форму, длительность и частоту следования импульсов) можно активно влиять на скорость резки, глубину зоны термического воздействия, толщину разрезаемого материала, количество грата на кромках. В литературе недостаточно внимания уделено теоретическим и экспериментальным исследованиям процесса резки с использованием импульсно-периодического излучения.

Модели резки

Учитывая определяющий характер тепловых явлений, для оценочных расчетов режимов резки используют тепловые модели, созданные на основе теории теплопроводности. При этом не учитывается влияние газогидродинамических явлений в полости реза. Простейшей является одномерная модель резки с последовательным образованием отверстий и коэффициентом перекрытия. Для оценочных расчетов режимов резки применяются также модель линейного источника тепла в пластине. В параметрической форме основное ее уравнение имеет вид [67]:

$$\frac{6,3}{P} = \ln\left(\frac{4,5}{Y}\right), \quad (2.81)$$

$$\text{где } P = q/\delta a \gamma (c T_n + m); Y = V_p b/a. \quad (2.82)$$

Здесь P, Y — параметры соответственно мощности и скорости; q — эффективная тепловая мощность луча, Вт; δ — толщина металла, м; a — коэффициент температуропроводности, $\text{м}^2/\text{с}$; γ — плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$; c — удельная теплоемкость, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; T_n — температура плавления, К; m — скрытая теплота плавления, $\text{Дж}/\text{кг}$; V_p — скорость резки, $\text{м}/\text{с}$; b — ширина реза, м.

При $P \geq 10$ и $Y \geq 5$ выражение (2.81) преобразуется в уравнение $Y = 0,48 P$ для мощного быстродвижущегося линейного источника те-

пла в пластине, при $P \leq 4$ и $Y \leq 1$ оно описывает предельное состояние теплового поля для линейного подвижного источника тепла. По (2.81) можно рассчитать скорость резки при заданной мощности излучения или требуемую мощность излучения при заданной толщине металла и скорости резки. В качестве примера рассчитаем минимальное значение q , требуемое для резки разных металлов толщиной 10-3 м при минимальной скорости резки $1,67 \cdot 10^{-3}$ м/с и $b=2 \cdot 10^{-4}$ м. Ниже приведены данные по разрезаемости разных металлов (Таблица 2.6):

Таблица 2.6.

Металл	Fe	Al	Ti	Ni	Cu	W	Mo
Q, Вт, при резке в режиме							
плавления	119,4	248,6	54,5	214,1	520,9	666,7	467,5
испарения	760,5	2748	312,6	1653,7	4393,4	6800,6	3660,6

Расчетные минимальные значения q характеризуют разрезаемость металлов в режиме плавления и испарения. При расчете q при резке в режиме испарения, согласно (2.82),

$$P = q/\delta a \gamma (cT_k + r), \quad (2.83)$$

где T_k — температура кипения металла; r — скрытая теплота испарения, Дж/кг. Значения q рассчитаны из условия, что теплофизические свойства металлов не зависят от температуры и агрегатного состояния. Для определения требуемой мощности лазера необходимо учесть поглощательную способность металла.

Лазерная резка - вид лазерной обработки листового материала, при которой сфокусированный лазерный луч разрушает материал, струя сжатого газа выдувает его из зоны реза, в результате происходит разделение детали на две. В зависимости от интенсивности излучения в зоне реза, вида материала, состава и давления режущего газа можно разделить лазерную резку на несколько видов: 1. Лазерно - кислородная резка. 2. Кислородная резка с поддержкой лазерным лучом. 3. Лазерная резка в инертном газе. 4. Лазерное термораскалывание. 5. Лазерная испарительная (сублимационная) резка.

1. Лазерно - кислородная резка. В этом случае режущим газом является кислород. При взаимодействии кислорода с раскаленным металлом происходит экзотермическая реакция окисления. Так в случае железа, выделившегося тепла обычно в 3-5 раз больше, чем подводимой мощности лазера. Образующиеся окислы выдуваются этой же струей кислорода.

Характерные особенности процесса:

- Диаметр сфокусированного луча меньше, чем диаметр кислородной струи. Диаметр струи обычно 12 мм;

- Ширина реза определяется диаметром сфокусированного луча и скоростью реза. Чем меньше толщина листа и чем выше скорость обработки, тем уже рез. Ширина реза может быть меньше 100 мкм.

- Давление в струе от 3-4 атм при резке тонкого листа до 0.3 атм при резке листа, толщиной 30 мм, причем оно тем меньше, чем больше толщина разрезаемого металла.

- Как правило, лазерная резка осуществляется расширяющимся лучом, т.е точка фокуса всегда расположена выше поверхности металла.

- Зазор между срезом сопла, формирующим струю составляет от 0.5 мм для тонкого листа до 3 мм для листа, толщиной 30мм.

- Чем толще металл, тем меньше скорость реза. Минимальная скорость реза 0.5-0.6 м/мин. Именно этот факт определяет максимальную толщину разрезаемого стального листа. В настоящее время – 30 мм при мощности лазера – 6 кВт.

При скорости резания меньше, чем 0.5 м/мин качество лазерной резки значительно падает. На поверхности реза появляются характерные дефекты – вырывы, ширина реза -возрастает, процесс переходит в автогенный.

2. Кислородная резка с поддержкой лазерным лучом

Для резки толстолистовой стали (прежде всего, в судостроении) в последнее время все шире применяется технология, при которой лазерный луч лишь нагревает поверхность металла до температуры около 1000 градусов перед тем, как на эту поверхность попадает сверхзвуковая струя кислорода. При этом, несмотря на экспоненциальную зависимость скорости окисления металла от температуры, процесс кислородной резки становится стабильным, стенки реза гладкими. Глубина резания значительно возрастает по сравнению с традиционной лазерно-кислородной резкой.

Характерные особенности кислородной резки с поддержкой лазерным лучом:

- Давление кислорода, необходимое для формирования сверхзвуковой струи большое (6-10 атм.).

- Диаметр пятна на поверхности металла существенно больше, чем диаметр струи.

- Ширина реза равна диаметру кислородной струи и, как правило, больше 3мм.

- Расстояние между срезом сопла и металлом 6-8 мм.

- Скорость реза около 0.2 м/мин, что существенно ниже скорости лазерно-кислородной резки.

- Толщина разрезаемого металла-до 50 мм при мощности лазерного луча 3 кВт и до 100 мм при мощности лазера 6 кВт.

3. Лазерная резка в инертном газе. Обычно применяется в тех случаях, когда нежелательно окисление кромок металла, например при резке нержавеющей стали, титана, алюминиевых сплавов. Эффективность резки в инертном газе ниже, чем при лазерно-кислородной резке за счет отсутствия дополнительного источника нагрева.

Характерные особенности:

- наиболее распространенный инертный режущий газ-азот (при резке титана-аргон),

- Давление режущего газа как правило большое: до 10 атм и больше, поэтому при такой технологии применяют фокусирующие линзы повышенной толщины.

- Формируется сверхзвуковая струя режущего газа, которая выдувает капли расплавленного металла из зоны реза.

- Излучение фокусируют на нижнюю поверхность листа,

- расстояние между срезом сопла и поверхностью металла минимально: 0.5-1мм,

- при резке толстого металла диаметр сопла достаточно большой, доходит до 3 мм, поэтому расход инертного газа большой, он часто определяет стоимость резки.

- Скорость резки в инертном газе относительно низка.

4. Лазерное термораскалывание стекла. В этом процессе, за счет неоднородного нагрева хрупкого материала, такого как стекло, лазерным лучом и его охлаждения струей инертного газа, происходит формирование трещины. Перемещение источника нагрева по поверхности стекла позволяет управлять направлением распространения трещины и получать гладкую грань раздела.

5. Лазерная испарительная (сублимационная резка). Применяется при очень больших интенсивностях лазерного излучения, которое реализуется в режиме очень коротких лазерных импульсов наносекундной и пикосекундной длительности.

Характерные особенности:

- применяется в микротехнологии.

- минимальное термическое воздействие на материал подложки.

- кпд процесса минимальный.

- длина волны излучения **лазера**, как правило, короче 1 мкм (твердотельные и эксимерные лазеры, лазеры на парах металлов.)[68]

Применение лазерной резки

В основе лазерной обработки лежит простой научный факт: лазерный луч можно сконцентрировать на поверхности материала в пятно диаметром в десятые доли миллиметра. Если при этом лазер обладает достаточной мощностью, то происходит расплавление, испарение, разрушение, изменение структуры материала.

Гравировка. Самая простая лазерная операция, не требующая очень сложного оборудования и мощного лазера, гравировка. Рабочее поле простейших гравировальных установок около квадратного дециметра, отклонение лазерного луча осуществляется двумя колеблющимися зеркалами. Если используется твердотельный лазер, можно гравировать металл и камень на глубину около десятой доли миллиметра, что вполне достаточно для хорошо обработанной поверхности. Если на установке стоит лазер на углекислом газе, то можно гравировать на дереве, стекле, коже, пластике. Разрешающая способность обычно лучше 0,1 мм. Типичный пример использования гравировальных комплексов — нанесение надписей и логотипов на сувенирную продукцию.

Методы лазерной инкрустации. Эти уникальные особенности лазерной технологии способствуют появлению принципиально новых видов продукции. К ним относятся, например, офисные таблички и вывески, выполненные методом лазерной инкрустации.

Сварка. Лазерную сварку производят как на воздухе, так и в среде защитных газов: аргона, CO₂. Вакуум, как при электронно-лучевой сварке, здесь не нужен, поэтому лазерным лучом можно сваривать крупногабаритные конструкции.

Обработка поверхностей. Еще одним направлением применения промышленных лазеров является обработка поверхностей. Высокие плотности мощности лазерного излучения позволяют получать качественно новые свойства поверхностей, недоступные традиционным методам обработки материалов. Лазерная обработка поверхностей металлов и сплавов относится к локальным методам термической обработки с помощью высококонцентрированных источников нагрева. Лазерное излучение позволяет производить обработку только поверхностного участка материала без нагрева остального объема и нарушения его структуры и свойств, что приводит к минимальному короблению деталей. В результате очевидны экономические и техно-

логические преимущества. Лазерная обработка позволяет оперировать в широком интервале режимов. Это позволяет достигать необходимых физических свойств поверхности, таких как твердость, износостойкость, шероховатость, а также геометрические размеры обработанных участков. Отсутствие механических усилий на обрабатываемый материал дает возможность обрабатывать малопрочные и тонкостенные изделия.

Лазерная термообработка. Методы лазерной термообработки аналогичны обычным методам термической обработки сплавов. Для осуществления лазерной закалки (термоупрочнения) локальный участок поверхности массивной детали нагревают с помощью излучения до сверхкритических температур, а после прекращения действия излучения этот участок охлаждается за счет отвода теплоты во внутренние слои металла. Высокая скорость охлаждения приводит к образованию закалочных структур в сплавах и к высокой твердости поверхности.

В том случае, когда толщина обрабатываемой детали соизмерима с размерами зоны лазерного воздействия и условия ускоренного теплоотвода не обеспечиваются, имеет место лазерный отжиг. Такая технологическая операция нашла широкое применение в микроэлектронике для отжига полупроводниковых материалов, в особенности имплантированных на металлические подложки. Лазерный отжиг, заключающийся в нагреве лазером закаленных деталей до температур ниже критических, может быть использован для обработки мелких деталей в приборостроении, например, пружинных элементов и др.

Окрашивание поверхностей. Лазеры также применяются для окрашивания разных поверхностей. Для этого на металл наносятся специальные виды химических красителей, впоследствии закрепляемых лазерным излучением. При этом прочность окрашиваемой поверхности гораздо выше традиционной покраски.

Оплавление поверхностей. Эта технологическая операция начала развиваться с появлением лазерного излучения и другими методами практически не выполняется. При оплавлении для улучшения качества поверхности (уменьшения пористости или шероховатости) режимы обработки подбирают исходя из требований получения наилучшей микрогеометрии поверхности, скорость охлаждения в этом случае, как правило, не регламентируется. Методы получения поверхностных покрытий - легирование и наплавка - отличаются тем, что участок поверхности нагревается выше температуры плавления, в зону оплавления вводят легирующие компоненты, и в результате образуется поверхностный слой с химическим составом, отличным от

основного металла. Вакуумно-лазерное напыление заключается в испарении материала участка поверхности под воздействием лазерного излучения в вакууме и конденсировании испарившихся продуктов на подложке.

Лазерная закалка. Основная цель лазерной закалки - повышение износостойкости деталей, работающих в условиях трения. Уменьшение износа деталей после лазерной закалки обусловлено рядом факторов: высокой твердостью поверхности, высокой дисперсностью структуры; увеличением несущих свойств поверхности; уменьшением коэффициента трения и др.

Лазерные принтеры (Компьютерная техника). В лазерных принтерах применяется электрографический способ формирования изображений, используемый в одноименных копировальных аппаратах. Лазер служит для создания сверхтонкого светового луча, вычерчивающего на поверхности предварительного заряженного светочувствительного барабана невидимого точечного электронного изображения - электрический заряд стекает с засвеченных лучом лазера точек на поверхности барабана. После проявления электронного изображения порошком красителя(тонера), налипающего на разреженные участки, выполняется печать - перенос тонера с барабана на бумагу и закрепление изображения на бумаге разогревом тонера до его расплавления. Лазерные принтеры обеспечивают наиболее качественную печать с разрешением до 50 точек/мм(1200dpi) и скорость печати до 1000зн/с.

2.2.6. Типы лазеров

Классификация лазеров проводится по различным признакам[69]:

1. по агрегатному состоянию их активной среды - газовые, твердотельные и жидкостные;
2. по типу накачки активной среды - электронным ударом, оптической, газодинамической, химической накачки;
3. по длительности излучения лазеров - непрерывные и импульсные.

Лазеры классифицируются на следующие типы: 1. Твердотельные лазеры(на кристаллах или стеклах); 2. Газовые лазеры; 3. Лазеры на красителях; 4. Химические лазеры; 5. Полупроводниковые лазеры; 6. Лазеры на центрах окраски; 7. Лазеры на свободных электронах.

В основном для обработки материалов используются два класса лазеров: так называемые твердотельные и газовые. Наиболее распространенные твердотельные лазеры на неодимовом стекле и иттрий-алюминиевом гранате с длиной волны около 1 микрона, и газовые лазеры на углекислом газе с длиной волны около 10 микрон (дальняя

инфракрасная область, невидимая глазом). Максимальные мощности для обычных твердотельных лазеров около 500 Вт, для газовых 5 кВт.

Использование современного лазерного оборудования

Лазер - высокоэффективное средство для обработки металлов и других материалов, благодаря уникальным свойствам: высокой мощности излучения, позволяющим мгновенно нагревать (прожигать) и охлаждать металл, не подвергая тепловой деформации всю заготовку.

Удаление продуктов сгорания из зоны резки осуществляется продувкой кислородом, воздухом, азотом или другим технологическим газом. Кроме того, лазерный луч - легко управляем, т.е. органично вписывается в автоматизированные системы.

Лазер успешно применяется в сварке, наплавке, маркировке, закатке, в резке металлов при изготовлении таких деталей, как прокладки, кронштейны, панели, приборные щитки, двери, декоративные решетки, дисковые пилы.

После появления кинематически сложных роботоманипуляторов и гибких оптоэлектронных лучевых проводников лазерная обработка металлов получила широкое распространение, т.е. стала применяться при резке пространственных металлоизделий. Лазерное оборудование, применяемое при резке, классифицируют по источникам излучения и выходной мощности, которая в свою очередь определяет материал обработки. Так, для обработки черных металлов и нержавеющей стали применяют твердотельные (на гранате с неодимом Nd:YAG) квазинепрерывные и импульсно-периодические источники лазерного излучения с выходной мощностью 100-300 Вт; в то же время для обработки легированных сталей и некоторых видов сплавов (впрочем, и для черных металлов тоже) используют газовые непрерывные CO₂ лазеры с выходной мощностью до 2500 Вт.

Как правило, современное оборудование для лазерной резки металла состоит из:

- лазера с системами охлаждения и питания;
- координатного стола для крепления заготовки;
- компьютерной системы управления столом;
- устройства подачи технологического газа;
- вентиляционной системы.

Огромные мощности излучения приводят к перегреву лазера, поэтому для его охлаждения используют двухконтурные водяные системы, либо холодильные компрессоры на фреоне. Источники питания лазера подбирают, исходя из решаемых технологических задач - трансформаторные или импульсные. Там, где нужна надежность,

используют трансформаторные схемы; при минимизации лазерных установок применяют импульсные.

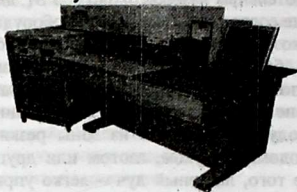


Рис. 2.29. Установка предназначена для скрайбирования кремниевых пластин, сквозной резки по заданному контуру и сверления отверстий в пластинах из кремния, алюмокерамики и других материалов, используемых в микроэлектронике. Толщина обрабатываемых пластин до 2 мм.

Современные координатные столы [71-75] являются высокоточным оборудованием и, как правило, базируются на портальной схеме («летающей оптике»), где неподвижная металлическая заготовка режется перемещаемым лазерным лучом. Есть и другие схемы. Так, при резке Nd:YAG - лазерами луч перемещается по одной координате, а стол с листовым материалом, по другой.

Управление координатным станком осуществляется промышленным компьютером и, кроме аппаратных устройств – приводов, датчиков и т.д., – включает пакет следующих файлов:

- программ ввода исходных данных (электронных чертежей) в графических редакторах AutoCad, CorellDraw, Adobe Illustrator и др. (форматы *.plt, *.ai, *.dxf, *.cf2);
- управляющих программ поворота, масштабирования и размножения исходного файла (чертежа) по рабочему полю стола;
- программ настройки параметров лазерной обработки и режима врезки, автоматического учета ширины реза, определения внутренних и внешних контуров, корректировки режима резки непосредственно в технологическом процессе и др.;
- программ настройки параметров координатного привода и рабочей среды оператора, генерацию (рисование) простейших геометрических фигур;
- программ подключения внешних устройств, управления лазерным излучателем, связь с внешней локальной сетью.

В режимах лазерной резки используют разный технологический газ, например, для щадящей резки черного металла используют кислород (газолазерная резка), а для нержавеющей стали – поток инерт-

ного газа, обычно азота. Для удаления газообразных и аэрозольных продуктов распада, возникающих при прожигании металлического листа, применяют вентиляцию, которую создает специальное устройство, являющееся неотъемлемой частью всех промышленных комплексов лазерной обработки.

Одним из методов, альтернативных «летающей оптике», является применение деформируемых зеркал, сочетающих преимущество стационарной и «портальной» схемы. Лазерный луч дважды меняет траекторию, отражаясь в комплексе зеркал с управляемой формой поверхностью, прежде чем достичь обрабатываемой заготовки. Явным преимуществом метода является отсутствие сложной механики; к недостаткам следует отнести сложность в управлении поверхности зеркала.

2.2.7. Преимущества, недостатки и сравнительная характеристика

Сфокусированное лазерное излучение позволяет резать почти любые материалы независимо от их теплофизических свойств. При этом можно получать качественные и узкие резы (шириной 0,1–1 мм) со сравнительной небольшой зоной термического влияния. При лазерной резке возникают минимальные деформации, как временные в процессе обработки заготовки, так и остаточные после ее полного остывания. В результате возможна резка с высокой степенью точности, в том числе нежестких и легкодеформируемых изделий. Благодаря относительно несложному управлению лазерным пучком можно выполнять автоматическую обработку плоских и объемных деталей по сложному контуру.

Лазерная резка особенно эффективна для стали толщиной до 6 мм, обеспечивая высокие качество и точность при сравнительно большой скорости разрезания. Однако для металла толщиной 20–40 мм она применяется значительно реже кислородной или плазменной резки, а для металла толщиной свыше 40 мм – практически не используется.

Таблица 2.7. Сравнение лазерной резки с кислородной, плазменной и гидроабразивной резкой [81].

Наименование	Характеристика лазерной резки по отношению к		
	кислородной	плазменной	гидроабразивной
Типичная ширина реза (мм)	меньше в разы и десятки раз		
Качество	Сильно превосходит	превосходит	уступает
Зона термического влияния	меньше	меньше	больше
Ограничение по максимальной толщине металла	очень сильно уступает	значительно уступает по цветным ме-	значительно уступает

		таллам, уступает по остальным металлам	
Производительность резки тонкой стали (до 6 мм, без пакетной резки)	превосходит	сопоставимая	сильно превосходит
Стоимость оборудования	гораздо выше	выше	сопоставимая
Стоимость обслуживания	выше	сопоставимая	сопоставимая

Преимущества лазерной резки. По сравнению с традиционными методами (Таблица 2.7.) в области раскроя листового проката (штамповкой, газоплавленной резкой, плазменной электроискровой резки и рубки), преимущества лазерной резки неоспоримы:

- высокая скорость;
- идеальная поверхность реза;
- отсутствие дополнительной обработки;
- высокая производительность процесса;
- экономия материала благодаря малой ширине разреза;
- незначительная зона термического воздействия;
- изготовление изделий любой сложности в единичных экземплярах;
- высокая повторяемость сложных изделий в любых количествах;
- отсутствие деформации материала;
- используя возможности лазерной резки, можно раскроить по сложному контуру практически любой листовой материал;
- отсутствует механическое воздействие на обрабатываемый материал.

Основное преимущество лазерной резки - ее автоматизация и компьютеризация, возможность переходить с одного типа деталей любой геометрической сложности на другой тип без ощутимых затрат времени. Чтобы начать выпуск новой продукции, не нужно изготовление серии специальных инструментов для наладки линии, что значительно снижает затраты на вложения и собственно себестоимость выпускаемой продукции.

Освоение выпуска нового типа детали не занимает больше времени, чем составление самого чертежа и ввод его в компьютер, управляющий лазером. Качество изготавливаемой продукции позволяет совершать сварку встык без смещений кромок среза и предварительной обработки соединяемых сторон. Лазерная резка в отличие от круглого универсального инструмента позволяет выполнять острые углы, переходы без радиусов, тонкие переемычки (толщиной менее 1-2 мм), отверстия любого диаметра. В роботизированных системах луч лазера позволяет производить объемную резку с применением высо-

котехнических оптоволоконных систем. Использование лазера особенно выгодно в тех случаях, когда требуется изготовление сложных деталей малыми сериями и большой номенклатуры. А в современном машиностроении такие, еще вчера считавшиеся уникальными заказы становятся все более распространенными. Поэтому лазеры применяются для изготовления и испытания опытных образцов техники: корпусов автомобилей, оружия, беспилотных летательных аппаратов, деталей космических аппаратов и многого другого.

2.3. Схемы нагреваемого тела

Для расчета температурных полей при сварке и резке, традиционно используются схемы нагрева разнообразными источниками теплоты, различающимися между собой по распределенности, времени действия и движению их относительно тела [76-78].

При определенных условиях все многообразие источников теплоты можно получить, пользуясь *мгновенным точечным источником теплоты*. Мгновенный точечный источник теплоты – понятие абстрактное, которому соответствует приблизительно такая физическая схема, при которой за весьма малый промежуток времени в очень малый объем вводится некоторое количество теплоты Q .

Мгновенный линейный источник теплоты представляет собой сочетание мгновенных точечных источников, действующих одновременно и расположенных по линии (рис.2.30, а). Равномерное распределение Q по линии означает действие мгновенного линейного источника. В случае если линейный источник распределен по нормали - нормальный линейный мгновенный источник (рис.2.30, б).

Мгновенный плоский источник теплоты представляет собой совокупность мгновенных точечных источников действующих одновременно и расположенных в одной плоскости (рис.2. 30, в). Мгновенным плоским источником считается равномерное распределение Q по сечению. В случае нормального распределения Q по кругу получается мгновенный нормальный круговой плоский источник.

Мгновенный объемный источник теплоты представляет собой совокупность мгновенных точечных источников распределенных по какому-либо закону в теле (рис.2.30,г). Объемный источник служит примером распределенного источника по всем направлениям.

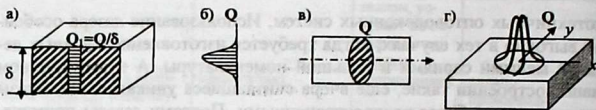


Рис.2.30. Расчетные схемы источников теплоты:
 а) линейный источник в пластине; б) нормальный линейный источник;
 в) плоский источник в стержне; г) нормальный круговой источник на поверхности полубесконечного тела.

Непрерывно действующие и движущиеся источники теплоты представляют собой совокупность мгновенных источников, распределенных по промежутку времени действия источника. Если точечный источник может действовать непрерывно в течение определенного отрезка времени t , он уже не будет мгновенным, так как теплота выделяется в точке постепенно.

Источники теплоты могут быть неподвижные, движущиеся, и быстро движущиеся. Движущийся источник не может быть мгновенным, т.к. его движение происходит в течение некоторого промежутка времени, когда выделяется теплота. Для составления уравнений, описывающих процесс распространения теплоты от движущихся непрерывно действующих источников, используют принцип наложения. С этой целью весь период действия источника разбивают на бесконечно малые отрезки времени dt . Действие источника в течении бесконечно малого отрезка представляют, как действие мгновенного источника теплоты. Суммируя процессы распространения теплоты от действующих, друг за другом в разных местах тела мгновенных источников теплоты получают уравнение температурного поля при непрерывном действии движущегося источника теплоты [79].

Распространение теплоты существенно зависит от формы и размеров тела. При выполнении расчетов, с целью их упрощения, обычно применяют одну из следующих основных схем [80]:

- *Бесконечное тело* представляет собой неограниченное в пространстве тело, и применяется в том случае, если границы тела не влияют на распространение теплоты (рис.2.31а).

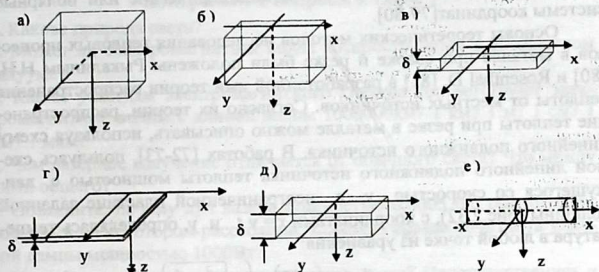


Рис.2.31. Расчетные схемы тел.

- *Полубесконечное тело* представляет собой массивное тело с одной ограничивающей плоскостью $z = 0$, остальные поверхности находятся на значительном удалении и не влияют на распространение теплоты (рис.2.31, б).

- *Бесконечная пластина* представляет собой тело, ограниченное двумя плоскостями $z = 0$ и $z = \delta$. При использовании этой схемы всегда предполагают, что температура по толщине листа равномерна, а теплота может распространяться только в плоскости с координатными осями x и y (рис.2.31, в).

- *Полубесконечная пластина* представляет собой тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями $z = 0$ и $z = \delta$ и плоскостью $y = 0$. остальные условия такие же, как и у бесконечной пластины (рис. 2.31, г).

- *Плоский слой* представляет собой пластину, у которой температура точек тела по толщине неравномерна. Эта схема применяется в тех случаях, когда толщина тела не настолько велика, чтобы можно было пренебречь влиянием ограничивающей плоскости $z = \delta$ и считать тело полубесконечным (рис.2.31, д).

- *Бесконечный и полубесконечный стержни* представляют собой тела с прямолинейной и или криволинейной осью. Температура в пределах поперечного сечения стержня равномерна (рис. 2.31, е).

Помимо названных схем при расчетах используются и другие простейшие схемы, связанные с формой тела (сплошной цилиндр, тонкостенный цилиндр). В зависимости от формы тела могут исполь-

зоваться как прямолинейные, так и цилиндрические или полярные системы координат [79-80].

Основы теоретических методов исследования тепловых процессов в металле при сварке и резке были положены Рыкалиным Н.Н. [80] и Rosenthal D. [81] в разработанной ими теории распространения теплоты от местных источников. Согласно их теории, распространение теплоты при резке в металле можно описывать, используя схему линейного подвижного источника. В работах [72-73], пользуясь схемой линейного подвижного источника теплоты мощностью q , движущегося со скоростью v в неограниченной пластине заданной толщины (рис.2.32), с координатами $x = vt$ и y , определялась температура в любой точке из уравнения:

$$T(x, y) = \frac{q}{2\pi\lambda\delta} \exp\left(-\frac{vx}{2a}\right) K_0\left(r\sqrt{\frac{v^2}{4a^2} + \frac{b}{a}}\right), \quad (2.5)$$

где $q = \eta I U$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; K_0 – функция Бесселя от мнимого аргумента 2-го рода; b – коэффициент, учитывающий интенсивность понижения температуры пластины из-за теплоотдачи в окружающую среду; λ – коэффициент теплопроводности; a – коэффициент температуропроводности.

На рис. 2.32 представлена диаграмма расчета температуры по этой схеме. Значения использованных данных, приведены в тексте под названием рисунка.

В точках, где находятся сосредоточенные источники, рассчитанная по этой схеме температура может достигать бесконечно больших значений. Поэтому, обычно при расчетах для мощных источников, применяемых при резке и сварке, могут быть большие погрешности в определении полей температур.

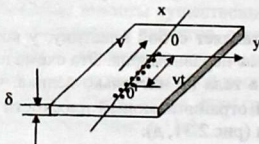


Рис. 2.32. Схема движения непрерывно действующего линейного источника мощностью q , перемещающегося со скоростью v в бесконечной пластине.

Контрольные вопросы к главе 2

1. Какова природа света?
2. Может ли электромагнитная волна распространяться в абсолютном вакууме?
3. Каким участкам электромагнитного спектра соответствуют электромагнитные волны с длиной волны 1000000 км? 1 км? 1 м? 1 см? 1 мм? 1 мкм?
4. Чем лазерное излучение отличается от обычного света? Что между ними общего?
5. Объясните, почему луч лазера мощностью 0,0005 Вт, сфотографированный на некотором расстоянии, кажется гораздо ярче света уличной лампы мощностью 1000 Вт?
6. Как объяснить свойство когерентности света? Пространственная и временная когерентность.
7. Какой свет называется монохроматическим?
8. Какое излучение называется вынужденным?
9. Как объяснить инверсную населенность?
10. Что такое лазер?
11. Каковы физические основы лазеров.
12. Объясните схему генератора лазерного излучения.
13. Перечислите применения лазеров.
14. Каковы преимущества и недостатки лазеров?

Контрольные задания к главе 2

1. Область электромагнитного спектра представляющая интерес для лазерной физики, простирается от субмиллиметровых длин волн до рентгеновского диапазона. Сюда входят следующие спектральные области: 1) дальняя инфракрасная; 2) ближняя инфракрасная (или просто ИК-область); 3) видимый свет; 4) ультрафиолетовая (УФ); 5) область вакуумного ультрафиолета (ВУФ); 6) мягкие рентгеновские лучи; 7) рентгеновские лучи. Из любого физического справочника узнайте интервалы длин волн, соответствующие указанным спектральным областям. Запишите и запомните границы каждого интервала.

2. Если уровни 1 и 2 показанные на рис. 1. разделены интервалом энергий $E_2 - E_1$, таким, что частота излучения, соответствующая переходу с уровня 2 на уровень 1, приходится на середину видимого участка спектра, то каково отношение населенностей этих двух уровней при комнатной температуре в состоянии термодинамического равновесия?

3. Пусть отношение населенностей N_2/N_1 двух уровней, находящихся в термодинамическом равновесии при температуре $T=300$ К, равно $1/e$. Вычислите частоту излучения ν , соответствующую переходу между этими уровнями. В какую область электромагнитного спектра попадает излучение с такой частотой?

4. Лазерный резонатор состоит из двух зеркал с коэффициентами отражения $R_2 = 1$ и $R_1 = 0,5$. Длина активной среды $7,5$ см, а сечение перехода $\sigma = 8,8 \times 10^{-19}$ см². Вычислите порог инверсной населенности.

5. Запомните и запишите длины волн соответствующие синему, зеленому и красному участкам спектра.

6. Рассчитайте длину волны электромагнитного излучения с частотой а) 60 Гц и б) 1240 кГц.

7. Для сварки отслоившейся сетчатки используется лазер, генерирующий световые импульсы с длиной волны 640 нм, продолжительностью 25 мс, средней энергией $0,50$ Вт в импульсе. Сколько энергии может выделяться в импульсе и сколько фотонов в нем?

8. Нарисуйте шкалу длин волн, перекрывающую видимый диапазон электромагнитных волн. В какую область этого спектра попадают рубиновый, He-Ne, Ar⁺-лазеры. Какому цвету соответствует излучение этих лазеров?

9. Назовите хотя бы четыре лазера, длины волн которых попадают в ИК-область спектра.

10. Назовите хотя бы три лазера, длины волн которых попадают в УФ- или ВУФ- область спектра. Какие проблемы надо решить, чтобы осуществить лазерную генерацию в УФ- и ВУФ- областях спектра?

11. Для хирургических применений требуется непрерывный лазер с выходной мощностью >20 Вт. Какой из лазеров удовлетворяет этому требованию?

12. Для обработки материалов требуется непрерывный лазер с выходной мощностью >1 кВт. Какой из лазеров удовлетворяет этому требованию?

ГЛАВА 3. ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

3.1. Математические модели и численные методы

1) *Решение задач.* Решение задач состоит из следующих основных стадий.

а). Первая стадия – это формулировка математической модели (постановка задачи). Для физического процесса модель состоит из уравнения описывающих процесс; в эти уравнения в виде коэффициентов входят характеристики тел или веществ, участвующих в процессе.

Например, скорость ракеты при вертикальном полете в вакууме определяется уравнением:

$$\left(M - \int_0^t m(\tau) d\tau\right) \left(\frac{du}{dt} + g\right) = cm(t), \quad (3.1)$$

где M – масса ракеты, $m(t)$ – создания расходы горючего, g – ускорения поле тяготения, а c скорость истечения газов, которое зависит от калорийности топлива и среднего молекулярного веса продуктов сгорания. Математическая модель должна охватывать важнейшие для данной задачи стороны явления. Если математическая модель выбрана недостаточно тщательно то, какие бы методы мы не применяли для расчета, все выводы будет недостаточно надежны, а в некоторых случаях могут отказаться совершенно неправильными. Так уравнение (3.1) для запуска ракеты с поверхности земли, ибо в нем не учтено сопротивление воздуха.

б). Вторая стадия – это математическое исследование. В зависимости от сложности модели применяются различные математические подходы. Для наиболее грубых и несложных моделей удастся получить аналитическое решение. Например, уравнение (3.1) легко интегрируется при $g = \text{const}$ и $m(t) = \text{const}$:

$$U = c \text{Ln} \left[\frac{M}{M - mt} - gt \right] \quad (3.2)$$

Из-за грубости модели физическая точность не велика, это позволяет оценить лишь порядок величин.

Для более точных и сложных моделей аналитическое решение удается получить редко. Обычно теоретики пользуются приближен-

ными математическими методами (например, разложение по малому параметру) позволяет получить удовлетворительные качественные и количественные результаты. Наконец для наиболее сложных и точных моделей основными методами решения являются численные; как правило, они требуют проведения вычислений на ЭВМ. Эти методы позволяют добиться хорошего качественного и количественного результата.

в). Третья стадия – это осмысливание математического решения и сопоставление его с экспериментом. Если имеется согласие, то выбран хороший метод, а если нет, то модель необходимо, пересмотреть и уточнить.

2). *Численные методы* являются мощными математическими средствами решения задачи. Есть задачи, где без сложных методов, не удастся получить ответа; классический пример – открытие Нептуна по аномалиям движения Урана. Например, суточный прогноз погоды должен быть вычислен за несколько часов; коррекцию траектории ракеты надо рассчитать за несколько минут. Это трудно осуществить без мощной вычислительной машины, выполняющей миллионы операций в секунду. Современные численные методы и мощные ЭВМ дали возможность решать такие задачи, о которых полвека назад могли только мечтать. Помимо математической модели, требуется разработка алгоритма, сводящего все вычисления к последовательности арифметических и логических действий. Выбирать модель и алгоритм надо с учетом скорости и объема памяти ЭВМ. Чересчур сложная модель может оказаться громоздкой и труднореализуемой в решении, а слишком простая не дает физической точности. Для сложных задач, разработка численных методов и состояние программ для ЭВМ, очень трудоемки и занимают от нескольких недель до нескольких лет.

3.2. Математическая модель. Этапы математического моделирования и вычислительный эксперимент

Построение и анализ с помощью ЭВМ математических моделей изучаемого объекта. Такой метод исследования называют вычислительным экспериментом.



Рис. 3.1. Схема вычислительного эксперимента

Основа вычислительного эксперимента триада:

Модель-метод (алгоритм) – программа объединение теоретических и экспериментальных методов исследования. Вычислительный эксперимент применяется в энергетике, аэрокосмической технике, обработке данных натурального эксперимента, в совершенствовании технологических процессов. Один из этапов вычислительного эксперимента – этап построения и исследования численного метода и вычислительный алгоритм. При переходе математической модели к численному методу возникает погрешность называемой *погрешностью метода*. Всякий численный метод воспроизводит исходную математическую модель приближенно. Наиболее типичными погрешностями метода является погрешность дискретизации и погрешность округления. Пример дискретизации построение разностной схемы путем замены дифференциальных выражений конечно-разностными отношениями. Результирующую погрешность, погрешность округления (вычислительная погрешность) – чувствительность алгоритма и точность представления чисел. Алгоритмы бывают устойчивые, не устойчивые.

Корректность численного метода $y=A(x)$. Чтобы численно решать задачу надо быть уверенным, в том, что искомое решения существует. Требуется единственность решение точной задачи интересует у соответствует входным данным x . Реально имеем входные данные с погрешностью $x+\delta x$ и находим $y+\delta y=A(x+\delta x)$. Погрешность решения $\delta y=A(x+\delta x)-A(x)$. Если решение зависит от входных данных, т.е. всегда $\|\delta y\| \rightarrow 0$ при $\|\delta x\| \rightarrow 0$. то задача называется устойчивой по входным данным, противном случае неустойчивой.

3.3. Приближенный анализ

Понятие близости. Если требуется определить некоторую величину y по известной величине x , то символично задачу можно записать $y=A(x)$. Здесь y и x могут быть числами, совокупностью чисел, функцией одного или нескольких переменных и т.д. если оператор A настолько сложен, что решение не удастся явно выписать или точно вычислить, то задачу решают приближенно. Например, вычисление

$$y = \int_a^b x(t)dt \quad (3.3)$$

Приближенно заменить $x(t)$ многочленом $\bar{x}(t)$ или другой функцией, интеграл которой легко вычислить. Интеграл заменяем суммой $\sum x(t_i)\Delta t_i$, вычислить которую несложно.

Таким образом приближенный метод заключается в замене исходных данных на близкие данные \bar{x} или заменой оператора A на близкий \bar{A} так, что значение $\bar{y} = \bar{A}(\bar{x})$ легко вычислялось. Ожидаем, значение \bar{y} будет близко к исходному решению.

Что такое близко? Для двух чисел x_1 и x_2 надо требовать малости $|x_1 - x_2|$.

Погрешность метода связана с тем, что точные операторы и исходные данные заменяются приближенными – погрешностью округления. Исходные данные x_i известны с относительной погрешностью $\Delta_i > 0$, заключен между $x_i(1 - \Delta_i)$ и $x_i(1 + \Delta_i)$ их абсолютная погрешность равна $\Delta_i |x_i|$. Сложим и вычитаем $x_1 \pm x_2$ с абсолютной погрешностью не более, т.е. при этих операциях абсолютное погрешности складываются. При умножении и делении $x_1 x_2, (x_1 / x_2)$ с относительной погрешностью не более $\Delta_1 + \Delta_2$, т.е. складываются. При решении квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1,2} = -0,5p \pm \sqrt{0,25p^2 + q}$$

в случае, когда $0 < q < p$ относительная ошибка округления для положительного корня x_1 велика.

3.4. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим численный метод решения систем линейных алгебраических уравнений:

$$Ax = f \quad (3.4)$$

где A – матрица $m \times m$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ – искомый вектор, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ – заданный вектор.

Предполагается, что определитель матрицы A отличен от нуля, так что решение x существует и единственно. Характерным является большой порядок матрицы A . Из алгебры известно, что (3.4) можно решить двумя способами: либо по формуле Крамера, либо методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса). При больших m первый способ, основанный на вычислении определителей, требует порядка $m!$ арифметических действий, в то время метод Гаусса только $O(m^3)$ - действий. Поэтому метод Гаусса в различных вариантах широко используется при решении на ЭВМ задач линейных алгебраических уравнений. Методы численного решения системы (3.4) делаются на две группы: прямые методы и итерационные методы. В прямых (или точных) методах решение x системы (3.4) находится за конечное число арифметических действий. Примером прямого метода является метод Гаусса. Называть точным решением возможно, отвлекаясь от погрешностей округления. Предпочтение отдается методу с меньшим числом действий.

Итерационные методы (называют также методом последовательных приближений) состоят в том, что решение x системы (3.4) находится как предел при $n \rightarrow \infty$ последовательность приближений $x^{(n)}$ где n – номер итерации. Как правило, за конечное число итераций этот предел не достигается. Обычно задается некоторое малое число $\varepsilon > 0$ (точность) и вычисление приводится до тех пор, пока не будет выполнена оценка.

$$\|x^{(n)} - x\| < \varepsilon \quad (3.5)$$

Число итераций $n = n(\varepsilon)$, которое необходимо привести для получения заданной точности ε . Качество различных итерационных процессов можно сравнить по необходимому числу итераций $n(\varepsilon)$.

Прямые методы которые мы рассматриваем не предполагают, что матрица A имеет какой-либо специальный вид. На практике они применяются для матриц умеренного порядка (порядка ста). Итерационные методы можно применить и для матриц высокого порядка, но сходимость будет медленная.

3.5. Метод Гаусса численного решения систем линейных алгебраических уравнений

Система линейных алгебраических уравнений $Ax=f$, где A – вещественная квадратная матрица порядка m , а f – заданный, x – искомые векторы.

Остальные неизвестные последовательно определяются из уравнений аналогичных (3.7**), (3.7*), (3.7):

$$x_n = y_n,$$

$$x_{n-1} = y_{n-1} - c_{n-1}^{(n-2)} x_n,$$

.....

$$x_3 = y_3 - c_{3n}^{(2)} x_n - c_{3n-1}^{(2)} x_{n-1} - \dots - c_{35}^{(2)} x_5 - c_{34}^{(2)} x_4,$$

$$x_2 = y_2 - c_{2n}^{(1)} x_n - c_{2n-1}^{(1)} x_{n-1} \dots - c_{25}^{(1)} x_5 - c_{24}^{(1)} x_4 - c_{23}^{(1)} x_3,$$

$$x_1 = y_1 - c_{1n} x_n - c_{1n-1} x_{n-1} - \dots - c_{15} x_5 - c_{14} x_4 - c_{13} x_3 - c_{12} x_2,$$

Таким образом, процесс решения линейной системы по методу Гаусса сводится к построению эквивалентной системы (3.7), (3.7*), (3.7**), (3.7***), имеющей треугольную матрицу. Необходимым и достаточным условием применимости метода является неравенство нулю всех элементов a_{ij} , где $i=j$ (т.е. диагональных элементов).

В матричном виде, систему уравнений (3.6) можно записать

$$A \cdot x = f, \quad (3.8)$$

где A - матрица свободных коэффициентов, x - столбец из неизвестных, f - столбец свободных членов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Расширенная матрица будет иметь вид

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & f_n \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Первый этап решения системы уравнений (3.6), называемый *прямым ходом* метода Гаусса, заключается в приведении расширенной матрицы (3.9) к треугольному виду, с помощью выражений (3.6* - 3.6***), (3.7* - 3.7***). Это означает, что все элементы матрицы ниже главной диагонали становятся равными нулю. Матрица такого вида называется *верхней треугольной матрицей*.

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & f_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & f_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} & f_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & f_n \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Обратный ход состоит в нахождении x_1, x_2, \dots, x_n из системы (3.10). Поскольку матрица системы имеет вид треугольника, можно последовательно начиная с x_n найти все неизвестные по выражения (3.8). В общем виде можно записать

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^n c_{ij}x_j, \quad i = n-1, \dots, 1, \quad x_n = y_n \quad (3.12)$$

Пример применения метода Гаусса. Рассмотрим систему трех уравнений. ($n=3$)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7. \end{cases} \quad (a)$$

Прямой ход, первый шаг. Разделим первое уравнение на $a_{11}=2$, получим

$$x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 = 2. \quad (б)$$

Умножим (б) на -3

$$-3x_1 - 6x_2 - 4,5x_3 = -6,$$

и сложим со вторым уравнением системы (а), в результате

$$-5x_2 - 6,5x_3 = -8. \quad (в)$$

Умножим (б) на -4 и

$$-4x_1 - 8x_2 - 6x_3 = -8,$$

сложим с третьим уравнением системы (а) и получим

$$3x_2 + x_3 = 1. \quad (г)$$

Мы получили систему второго порядка

$$\begin{cases} -5x_2 - 6,5x_3 = -8 \\ 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \quad (д)$$

Второй шаг. Разделим первое уравнение системы (д) на -5

$$x_2 + 1,3x_3 = 1,6 \quad (е)$$

Умножим (е) на -3 и сложим со вторым уравнением системы (д) и получим

$$-2,9x_3 = -5,8. \quad (ж)$$

Таким образом, находим: $x_3 = 2$

В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 = 2 \\ x_2 + 1,3x_3 = 1,6 \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

С верхней треугольной матрицей:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1,5 \\ 0 & 1 & 1,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратный ход, последовательно находим неизвестные x_2 и x_1

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = 1,6 - 1,3x_3 = -1$$

$$x_1 = 2 - 2x_2 - 1,5x_3 = 1$$

Таким образом, решение системы (а) найдено.

Вычислительную схему рассмотрим на конкретном примере системы четырех линейных алгебраических уравнений, затем перейдем к составлению программы.

Пусть дана система уравнений:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4$$

(3.13)

Предположим, что a_{11} либо, в противном случае, переставим уравнения так, чтобы это условие было выполнено. Поделим все члены первого уравнения системы на a_{11} :

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

(3.14)

С помощью уравнение (3.14) из оставшихся уравнений (3.13) исключим x_1 подставляя ее во второе, третье и четвертое уравнение системы (3.13). При этом получим систему трех уравнений не содержащих x_1 :

$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = b_2^{(1)}$$

$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = b_3^{(1)}$$

$$a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = b_4^{(1)}$$

(3.15)

Каждый коэффициент системы (3.15) в соответствии с формулами

$$R_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}; \quad \begin{aligned} a_{ji}^{(1)} &= a_{ji} - R_{1i} a_{j1} \\ b_j^{(1)} &= b_j - R_{1i} b_1 \\ R_{1i} &= \frac{a_{1i}}{a_{11}}, j=2,3,4; i=2,3,4 \end{aligned}$$

Полученную систему уравнений (3.15) можно преобразовать, как и первоначальную можно предположить, что $a^{(1)}_{22} \neq 0$, либо поменять уравнения местами. Поделив первое уравнение (3.6) на $(a^{(1)}_{22})$, получим

$$x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_3 + \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_4 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (3.16)$$

Подставляя x_2 из уравнения (3.16) во второе и третье уравнение системы (3.15) получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} a_{33}^{(2)} x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 &= b_3^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} x_3 + a_{44}^{(2)} x_4 &= b_4^{(2)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Коэффициенты определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ji}^{(1)} - R_{2i} a_{j2}^{(1)} \\ a_j^{(2)} &= b_j^{(1)} - R_{2i} b_2^{(1)}; \quad R_{2i} = \frac{a_{2i}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad i=3,4, j=3,4. \end{aligned}$$

По аналогии, поделив все члены первого уравнения системы (3.17) на $a_{33}^{(2)}$ получим

$$x_3 + \left(\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \right) * x_4 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \quad (3.18)$$

Подставляя значение x_3 из уравнения (3.18) во второе уравнение (3.17) найдем:

$$\begin{aligned} a_{43}^{(2)} \left(b_3^{(2)} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} x_4 \right) + a_{44}^{(2)} x_4 &= b_4^{(2)} \\ a_{44}^{(2)} x_4 &= b_4^{(3)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Коэффициенты уравнения (3.19) определяются

$$\begin{aligned} a_{ji}^{(3)} &= a_{ji}^{(2)} - R_{3i} a_{j3}^{(2)} \\ b_j^{(3)} &= b_j^{(2)} - R_{3i} b_3^{(2)}; R_{3i} = \frac{a_{3i}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \quad j=4, i=4 \end{aligned}$$

на этом первый этап решения заканчивается. На втором этапе из уравнения (3.19) находим x_4 , а затем из уравнения (3.18), (3.17) и

(3.15) - значения x_3 , x_2 и x_1 соответственно. Можно привести программу для ЭВМ и схемы на алгоритмическом языке Фортран или Бейсик.

Пример применения метода Гаусса

Рассмотрим систему трех уравнений. ($N=3$)

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \quad (a)$$

$$4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7$$

Прямой ход первый шаг. Разделим первое уравнение на $a_{11}=2$

$$x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 = 2 \quad (б)$$

Умножим (б) на -3 и сложим со вторым уравнением системы (а)

$$-3x_1 - 6x_2 - 4,5x_3 = -6$$

$$-5x_2 - 6,5x_3 = -8 \quad (в)$$

Умножим (б) на -4 и сложим с третьим уравнением системы (а)

$$-4x_1 - 8x_2 - 6x_3 = -8$$

$$3x_2 + x_3 = 1$$

Мы получили систему второго порядка

$$-5x_2 - 6,5x_3 = -8$$

$$3x_2 + x_3 = 1 \quad (г)$$

Второй шаг: разделим первое уравнение системы (г) на -5

$$x_2 + 1,3x_3 = 1,6 \quad (д)$$

Умножим (д) на -3 и сложим со вторым уравнением системы (г)

$$-2,9x_3 = -5,8 \quad (е)$$

Третий шаг: делим (е) на -2,9

$$x_3 = 2$$

В результате получим систему

$$x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 = 2$$

$$x_2 + 1,3x_3 = 1,6$$

$$x_3 = 2$$

С верхней треугольной матрицей:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1,5 \\ 0 & 1 & 1,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратный ход: из системы последовательно находим

$$x_3 = 2;$$

$$x_2 = 1,6 - 1,3 * x_3 = 1,6 - 1,3 * 2 = -1;$$

$$x_1 = 2 - 2 * x_2 - 1,5 * x_3 = 1$$

Таким образом, решение системы (1) найдено: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$

Итерационный метод позволяет найти приближенное решение системы путем построение последовательности приближений (итераций), начиная с некоторого начального приближения. Само приближенное решение является результатом вычислений, полученным после конечного числа итераций.

Выбор того или иного численного метода зависит от многих обстоятельств – от имеющихся программ, от вида матрицы A , от типа расчета и др.

Возможны разные постановки задачи (3.4)

1) Найти решение одной конкретной задачи (3.4).

2) Найти решение нескольких вариантов задачи (3.4) с одной и той же матрицей и разными правыми частями f . Может оказаться, что неоптимальной для одной задачи метод является весьма эффективным для много вариантного расчета. Выбор алгоритма должен зависеть от типа расчета, от объема оперативной памяти машины и конечно, от порядка системы. Качество алгоритма определяется машинным временем, которое требуется для нахождения решения системы уравнений.

3.6. Решение систем линейных уравнений методом простой итерации

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

(3.20)

Перепишем систему (3.20) в виде:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \beta_1$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \beta_2$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + \beta_n$$

(3.21)

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

Перепишем систему (3.20) в виде:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \beta_1 \\
 x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \beta_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + \beta_n
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

или сокращенно:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{3.22}$$

Правая часть системы (3.22) определяет отображение f

$$f: y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{3.23}$$

Преобразующее точку $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n - мерного векторного пространства в точку $y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ того же пространства. Используя систему (3.23) и выбрав начальную точку $x^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ можно построить итерационную последовательность точек n -мерного пространства (аналогично методу простой итерации для скалярного уравнения

$$x = f(x): x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \dots \tag{3.24}$$

3.7. Уравнение с одним неизвестным

1. Исследование уравнения. Пусть задана непрерывная функция $f(x)$ и требуется найти все или некоторые корни уравнения

$$f(x) = 0 \tag{3.25}$$

эта задача распадается на несколько задач. Во-первых, надо исследовать количество, характер и расположение корней. Во-вторых, найти приближенные значения корней. В-третьих, выбрать из них интересующих нас корни и вычислить их с требуемой точностью.

Первые и вторая задачи решаются аналитическими и графическими методами.

Например, многочлен $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ имеет n комплексных корней, не обязательно различных, и все корни лежат внутри круга

$$|x_p| \leq 1 + \frac{1}{|a_n|} \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|)$$

Правда, эта оценка не оптимальная, модули всех корней могут быть много меньше правой части неравенства, в чем легко убедиться на примере многочлена $P(x) = \sum_{k=1}^n (x - k)$.

Когда ищутся только действительные корни уравнения, то полезно составить таблицу значений $f(x)$.

Если в двух соседних узлах таблицы функция имеет разные знаки, то между этими узлами лежит нечетное число корней уравнения (по меньшей мере один). Если эти узлы близки, то, скорее всего, корень между ними только один. Но выявить по таблице корни четной кратности сложно.

По таблице можно построить график функции $y=f(x)$ и графический найти точки его пересечения с осью абсцисс. Этот способ более нагляден и дает неплохие приближенные значения корней. Во многих задачах техники такая точность уже достаточна.

В технике еще популярны графические методы решения уравнений (номография). Построение графика зачастую позволят выявить даже корни четной кратности. Иногда удается заменить уравнение (3.25) эквивалентным ему уравнением $\varphi(x) = \psi(x)$, в котором функции $y_1 = \varphi(x)$, $y_2 = \psi(x)$ имеют несложные графики. Например, уравнение

$x \sin x - 1 = 0$ удобно преобразовать к виду $\sin x = \frac{1}{x}$. Абсциссы точек пересечения этих графиков будут корнями исходного уравнения. Приближенные значения корней уточняют различными итерационными методами. Рассмотрим наиболее эффективные из них.

2. Дихотомия (деление пополам). Пусть мы нашли такие точки x_0, x_1 , что $f(x_0)f(x_1) \leq 0$, т.е. на отрезке $[x_0, x_1]$ лежит не менее одного корня уравнения. Найдем середину отрезка $x_2 = (x_0 + x_1)/2$ и вычислим $f(x_2)$. Из двух половин отрезка выберем ту, для которой $f(x_2)f(x_{\text{прав}}) \leq 0$, ибо один из корней лежит на этой половине. Затем новый отрезок опять делим пополам и выберем ту половину, на концах которой функция имеет разные знаки, и т.д. (рис. 3.2).

Если требуется найти корень с точностью ε , то продолжаем деление пополам до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε . Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью.

Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью.

Дихотомия проста и очень надежна: к простому корню она сходится для любых непрерывных функций $f(x)$, в том числе не диффе-

ренцируемых, при этом она устойчива к ошибкам округления. Скорость сходимости за одну итерацию точность увеличивается примерно вдвое, т.е. уточнение трех цифр требует 10 итераций. Зато точность ответа гарантируется.

Перечислим недостатки метода. Для начала расчета надо найти отрезок, на котором функция меняет знак.

Если в этом отрезке несколько корней, то заранее не известно, к какому из них сойдется процесс (хотя к одному из них сойдется).

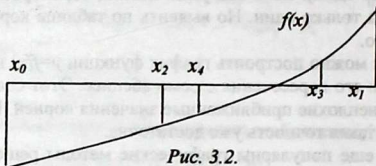


Рис. 3.2.

Метод применим к корням четной кратности. Для корней нечетной высокой кратности он сходится, но менее точен и хуже устойчив к ошибкам округления, возникающим при вычислении $f(x)$. Наконец, на системы уравнений дихотомия не обобщается.

Дихотомия применяется тогда, когда требуется высокая надежность счета, а скорость сходимости малозначительна.

3. Удаление корней. Одним из недостатков дихотомии является сходимость неизвестно к какому корню, и этот недостаток имеется почти у всех итерационных методов. Его можно устранить удалением уже найденного корня. Если \bar{x}_1 есть простой корень уравнения (3.25) и $f(x)$ непрерывна, то вспомогательная функция $g(x) = f(x)/(x - \bar{x}_1)$ непрерывна, причем все нули функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают, за исключением \bar{x}_1 , ибо $g(\bar{x}_1) = 0$. Если \bar{x}_1 — кратный корень уравнения (3.25), то он будет нулем $g(x)$ кратности на единицу меньше; остальные нули обеих функций по-прежнему будут одинаковы. Поэтому найденный корень можно удалить, т.е. перейти к функции $g(x)$. Тогда нахождение остальных нулей $f(x)$ сведется к нахождению нулей $g(x)$. Когда мы найдем какой-нибудь корень x_2 функции $g(x)$, то этот корень тоже можно удалить, вводя новую вспомогательную функцию $\varphi(x) = g(x)/(x - \bar{x}_1) = f(x)/(x - \bar{x}_1)x(x - \bar{x}_2)$. Так можно последовательно найти все корни $f(x)$. Строго говоря, мы находим лишь приближенное

значение корня $\bar{x} \approx \bar{x}$. А функция $\bar{g}(x) = f(x)/(x - \bar{x}_1)$ имеет нуль в точке \bar{x}_1 и полюс в близкой к ней точке (рис. 3.3); только на некотором расстоянии от этого корня она близка к $g(x)$, чтобы это не сказывалось при нахождении следующих корней, надо вычислить каждый корень с высокой точностью, особенно если он краткий или вблизи него расположен другой корень уравнения. Кроме этого, в любом методе окончательные итерации вблизи определяемого корня рекомендуется делать не по функциям типа $g(x)$, а по исходной функции $f(x)$. Последние итерации, вычисленные по функции $g(x)$, нулевого приближения.

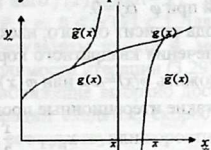


Рис. 3.3.

Особенно важно это при нахождении многих корней, ибо, чем больше корней удалено, тем меньше нули вспомогательной функции $G(x) = f(x)/\Pi(x - \bar{x})$ соответствует остальными нулями функции $f(x)$.

Учитывая эти предосторожности и вычисляя корни с 8-10 верными десятичными цифрами, зачастую. Можно определить десятка два корней, о расположении которых заранее ничего не известно (в том числе корней высокой кратности $p \sim 5$).

4. Метод простых итераций. Заменяем уравнения (3.25) эквивалентными ему уравнением $x = \varphi(x)$. Это можно сделать многими способом, например, положив $\varphi(x) \equiv x + \psi(x)f(x)$, где $\psi(x)$ — произвольная непрерывная знакопостоянная функция. Выберем некоторое нулевое приближение x_0 и вычислим дальнейшие по формулам

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.26)$$

Очевидно, если x_n стремится к некоторому пределу \bar{x} , то этот предел есть корень исходного уравнения.

Исследуем условия сходимости. Если $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную, тогда

$$x_{n+1} - \bar{x} = \varphi(x_n) - \varphi(\bar{x}) = (x_n - \bar{x})\varphi'(\xi), \quad (3.27)$$

где точка ξ лежит между точками x_n и \bar{x} . поэтому если всюду $|\varphi'(\xi)| \leq q < 1$, то отрезки $|x_n - \bar{x}|$ убывают не медленнее членов геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$ и последовательность x_n сходится при любом нулевом приближении.

Если $|f'(x)| > 1$, то в силу непрерывности $|f'(x)|$ больше единицы и в некоторой окрестности корня итерация не сходится.

Если $|f'(x)| < 1$ но вдали от корня $|f'(x)| > 1$, то итерации сходятся, если нулевое приближение выбрано достаточно близко к корню; при произвольном нулевом приближении сходимости может не быть.

Эти рассуждения переносятся на непрерывные функции практически без изменений.

Очевидно, что чем меньше q тем быстрее сходимость. Вблизи корня асимптотическая сходимость определяется величиной $|f'(x)|$ и будет особенно быстрой при $f'(x) = 0$.

Значит успех метода зависит от того, насколько удачно выбрано $\varphi(x)$, например для извлечения квадратного корня, т.е. решения уравнения $x^2 = a$, можно положить $\varphi(x) = a/x$ или $\varphi(x) = \frac{1}{2}X[x + (a/x)]$ и соответственно написать такие итерационные процессы:

$$x_{n+1} = \frac{a}{x_n} \quad \text{или} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (3.28)$$

Первый процесс вообще не сходится, а второй сходится при любом $x_0 > 0$; сходится но очень быстро, ибо $f'(x) = 0$. Второй процесс используется при извлечении корня на клавишных машинах.

5. Метод Ньютона. Он называется также методом касательных или методом линеаризации. Если x_n есть некоторое приближение к корню x , а $f(x)$ имеет непрерывную производную, то уравнение (3.23) можно преобразовать следующим образом:

$$0 = f(x) = f(x_n + (x - x_n)) = f(x_n) + (x - x_n)f'(\xi)$$

Приближенно заменяя $f'(\xi)$ на значение в известной точке x_n , получим такой итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.29)$$

Геометрически этот процесс означает обмен на каждой итерации графика $y = f(x)$ касательной к нему (рис. 3.4).

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода простых итераций, если положить $(x) = x - [f(x)]/f'(x)$

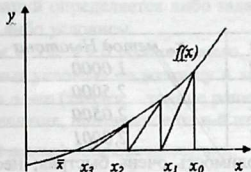


Рис. 3.4

Тогда $\varphi'(x) = (ff''/f'^2)$. Если \bar{x} есть P -кратный корень уравнения (3.25), то вблизи него $f(x) \approx a(x - \bar{x})^P$; отсюда не трудно получить $\varphi'(x) \approx (P-1)/P$, т.е. $0 \leq \varphi'(\bar{x}) < 1$. Для простого корня $P=1$ и $\varphi'(x) = 0$. Используя результаты пункта 4, можно сформулировать следующие условия сходимости итерации (3.29).

Если нулевое приближение выбрано достаточно близко к корню, ньютоновские итерации сходятся; скорость сходимости велика для простого корня и соответствует скорости геометрической прогрессии для кратного корня. При произвольном нулевом приближении итерации сходятся, если всюду $|ff''| < (f')^2$; в противном случае сходимость будет не при любом нулевом приближении, а только в некоторой окрестности корня.

Сходимость вблизи любого корня монотонна, что легко видеть из рис.; но вдали от корня возможна немонотонность итераций. Отметим, что рис. указывает еще на одно достаточное условие сходимости итераций. Пусть $f'(x) \geq 0$ справа от корня на отрезке $[\bar{x}, a]$; если x_0 выбрано также справа от корня на этом отрезке, то итерации (3.29) сходятся, причем монотонно. То же будет, если $f'(x) \leq 0$ слева от корня на отрезке $[b, \bar{x}]$, и на этом же отрезке выбрано нулевое приближение. Таким образом, итерации сходятся к корню с той стороны, с которой $f(x)f'(x) \geq 0$.

Пример. Рассмотрим решения уравнения $f(x) \equiv x^2 - a = 0$. Тогда общая формула метода Ньютона (3.29) принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

Мы получили вторую формулу (3.28), которая, как отмечалось раньше, позволяет очень быстро находить квадратный корень с помощью только сложения и деления. Для иллюстрации в таблице 1 приведен ход итераций при извлечении квадратного корня из $a=4$.

$$f(x) \equiv x^2 - 4 = 0$$

n	x_n метод Ньютона
0	1,0000
1	2,5000
3	2,0500
4	2,0001

Видно, что сходимость очень быстрая; несмотря на неважное нулевое приближение, уже третья итерация дает точность 0,005%.

Попутно можно заметить, что близи корня итерации сходятся из одной стороны, т.е. монотонно, хотя первая итерация дает переброс на другую сторону корня. Надо отметить кроме метода Ньютона еще применяется метод секущих (метод хорд) и метод парабол.

3.8. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Итерационные методы Якоби и Зейделя

Перейдем к изучению итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Будем рассматривать систему

$$Ax=f \quad (3.30)$$

где матрица $A=[a_{ij}]$, $i,j=1,2,\dots,m$, имеет обратную $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)^T$, $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)^T$.

Рассмотрим два примера итерационных методов. Для их построения предварительно преобразуем систему (3.30) к виду

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{f_i}{a_{ii}}, i=1,2,\dots,m \quad (3.31)$$

(при этом предполагается, что все $a_{ii} \neq 0$).

Условимся, как обычно, считать значение суммы равным нулю, если верхний предел, суммирования меньше нижнего. Так уравнение

$$(3.31) \text{ при } i=1 \text{ имеет вид: } x_1 = -\sum_{j=2}^m \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j + \frac{f_1}{a_{11}}$$

В дальнейшем верхний индекс будет указывать номер итерации, например $x^n=(x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n)^T$, где x_i^n n -я итерация i -й компоненты вектора x .

В методе Якоби исходят из записи системы в виде (3.31), причем итерация определяется следующим образом:

$$x_i^{n+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n + \frac{f_i}{a_{ii}}, \quad n=0,1,\dots,n_0, i=1,2,\dots,m \quad (3.32)$$

Начальные значения x_i^0 , $i=1,2,\dots,m$ задаются произвольно.

Окончание итераций определяется либо заданием максимально-го числа итераций n_0 , либо условием $\max_{1 \leq i \leq m} |x_i^{n+1} - x_i^n| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ заданное число.

При определенных условиях на матрицу A метод Якоби сходится, т.е. $\|x^n - x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (здесь x — точное решение системы (3.30), а x^n — приближенное решение, полученное на n -й итерации).

Итерационный метод Зейделя имеет вид:

$$x_i^{n+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n + \frac{f_i}{a_{ii}}, \quad n=0,1,\dots,n_0, i=1,2,\dots,m \quad (3.33)$$

Чтобы понять, как находится отсюда значения x_i^{n+1} , $i=1,2,\dots,m$, запишем подробнее первые два уравнения системы (3.33):

$$x_1^{n+1} = -\sum_{j=2}^m \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^n + \frac{f_1}{a_{11}}, \quad (3.34)$$

$$x_2^{n+1} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{n+1} - \sum_{j=3}^m \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^n + \frac{f_2}{a_{22}} \quad (3.35)$$

Первая компонента x_1^{n+1} вектора x^{n+1} находится из уравнения (3.34) явным образом, для ее вычисления нужно знать вектор x^n и значения f_j . При нахождении x_2^{n+1} из уравнения (3.35) используется только что найденное значение x_1^{n+1} и известные значения x_j^n , $j=3,\dots,m$, с предыдущей итерации. Таким образом, компоненты x_i^{n+1} вектора x^{n+1} находятся из уравнения (3.33) последовательно, начиная с $i=1$.

Например:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_1 - x_2 - x_3 - 1, \\ x_2 &= 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 2, \\ x_3 &= x_1 - x_2 - 3 \end{aligned}$$

Примем за начальное приближение точку $(0,0,0)$ трехмерного пространства. Проставим в правую часть. Получим координаты новой точки $(-1,-2,-3)$. Используя эту точку, как начальную получим следующую точку $(1;-2;-2)$ и т.д.

Тем самым получена последовательность точек $(0;0;0), (-1;-2;-3), (1;-2;-2), \dots$

3.9. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Постановка задачи

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (3.36)$$

Основная задача, относящаяся к этому уравнению, есть задача Коши. Найти решение уравнения (3.36)

$$y = y(x) \quad (3.37)$$

Удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$; иными словами требуется найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 3.5.). Если правая часть $f(x, y)$ непрерывна в области R , определяемой неравенствами

$$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b,$$

то существует по меньшей мере одно решение (3.37), определенное в некоторой окрестности $|x - x_0| < h$, где h — положительное число. Это решение единственно, если в R выполнено условие Липшица

$$|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| \leq N|\tilde{y} - y|, \quad (3.38)$$

где N — постоянная (константа Липшица), зависящая в общем случае от a и b .

Если $f(x, y)$ имеет ограниченную производную $f_y(x, y)$ в R , то можно положить $N = \max |f_y(x, y)|$ при $(x, y) \in R$. Для дифференциального уравнения n -го порядка $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

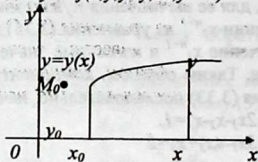


Рис. 3.5

Задача Коши состоит в нахождении решения $y = y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

3.10. Метод последовательных приближений

Изложим этот метод применительно к дифференциальному уравнению первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (3.39)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$ предполагается, что в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ уравнение (3.39) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения. Будем строить искомое решение $y = y(x)$ для значений $x \geq x_0$. Случай, $x \leq x_0$ вполне анало-

гичен. Интегрируя правую и левую части уравнения (3.39) в пределах от x_0 до x , получим

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad dy = f(x, y)dx$$

$$\int_{x_0}^x dy = \int_{x_0}^x f(x, y)dx \quad (3.40)$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y)dx$$

или в силу начального условия, будем иметь

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y)dx \quad (3.41)$$

Для нахождения этого решения применим метод последовательных приближений. Заменяя в равенстве (3.41) неизвестную функцию y данным значением y_0 , получим первое приближение

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0)dx$$

Далее, подставив в равенство (3.41) вместо неизвестной функции y найденную функцию y_1 , будем иметь второе приближение

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1)dx$$

Вообще, все дальнейшие приближения строятся по формуле

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1})dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.42)$$

Геометрически последовательные приближения представляют собой кривые $y_n = y_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) проходящие через общую точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 3.6)

Доказывается, что при выполнении условия Липшица

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leq N|\bar{y} - y|, \quad (3.43)$$

последовательные приближения $y_n = y_n(x)$ на некотором достаточно малом отрезке $[x_0, x_0+h]$ имеют смысл и равномерно сходятся, причем предельная функция

$$y(x) = \lim y_n(x) \quad (3.44)$$

где $n \rightarrow \infty$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.39) и начальному условию.

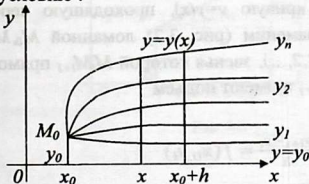


Рис. 3.6.

Пример 1. Методом последовательных приближений найти приближенное решение дифференциального уравнения

$$y' = x - y,$$

удовлетворяющему начальному условию $y(0) = 1$.

Решение: в качестве начального приближения возьмем $y_0(x) = 1$ так как

$$\frac{dy}{dx} = x - y; \quad dy = (x - y)dx$$

$$\int_0^x dy = y(x) - y_0(x) = \int_0^x (x - y)dx$$

$$y = 1 + \int_0^x (x - y)dx$$

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x - y_0(x))dx = 1 + \int_0^x (x - 1)dx = 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

будет иметь

$$y_2 = 1 + \int_0^x (x - y_1)dx = 1 + \int_0^x (x - 1 + x - \frac{x^2}{2})dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6};$$

Подобным же образом получим

$$y_3 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

и т.д.

$$y_4 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120}$$

3.11. Метод Эйлера

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (3.45)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Выбрав достаточно малый шаг h , построим систему равноотстоящих точек

$$x_i = x_0 + ih \quad (i=0, 1, 2, \dots) \quad (3.46)$$

искомую интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$, приближенно заменим (рис. 3.7) ломанной $M_0M_1M_2\dots$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots$), звенья которой M_iM_{i+1} прямолинейны между прямыми $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ и имеют подъем

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \quad (3.47)$$

получается ломаная Эйлера.

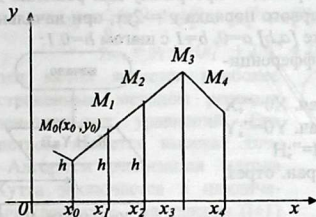


Рис. 3.7.

Таким образом, звенья $M_i M_{i+1}$ ломаной Эйлера в каждой вершине M_i имеют направление $y_i = f(x_i, y_i)$, совпадающее с направлением интегральной кривой уравнение (3.45), проходящие через точку M_i .

Из формулы (3.47) вытекает, что значения y_i могут быть определены (метод Эйлера) по формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad \Delta y_i = hf(x_i, y_i), \quad (i=0, 1, 2, \dots) \quad (3.48)$$

Другой модификацией метода Эйлера является усовершенствованный метод Эйлера-Коши, при котором сначала определяется «грубое приближенное» решение $\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf_i$ исходя, из которого находится направление поля интегральных кривых (рис.3.8)

$$\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$$

Затем приближенно полагают

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f_i + \tilde{f}_{i+1}}{2} \quad (3.49)$$

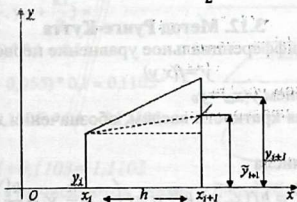


Рис. 3.8.

В качестве примера, приведем программу для решения дифференциального уравнения первого порядка $y' = -2yx$, при начальных условиях $y_0 = 0, x_0 = 0$ на отрезке $[a, b]$ $a = 0, b = 1$ с шагом $h = 0.1$:

```

10 REM "решение дифференциального уравнения"
20 INPUT "Введите нач. X0=";X
30 INPUT "Введите нач. Y0=";Y
40 INPUT "Зад. шаг H=";H
50 INPUT "Введите гран. отрез. B=";B
60 GOSUB 100
Y1=Y+HF
70 Y=Y1
X=X+H
PRINT "X=";X;"Y=";Y1
80 IF X<B GOTO 60
90 GOTO 110
100 F=-2X*Y:RETURN
110 END.

```

На рис.3.9. приведена блок-схема решения дифференциального уравнения методом Эйлера.

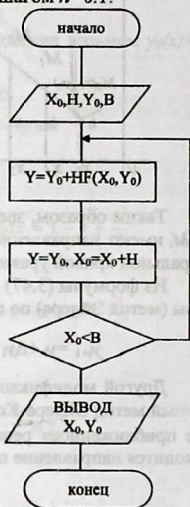


Рис. 3.9. Блок-схема решения методом Эйлера

3.12. Метод Рунге-Кутта

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (3.50)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$

Выберем, шаг h для краткости введем, обозначения $x_i = x_0 + ih$ и $y = y(x_i)$, $(i = 0, 1, \dots)$

Рассмотрим числа

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), k_4^{(i)} = hf(x_i + h; y_i + k_3^{(i)}) \quad (3.51)$$

Последовательное значение y_i искомой функции y определяется по формуле $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), (i = 0.1.2, \dots)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}) \quad (3.52)$$

Этот метод является наиболее распространенным методом решения дифференциальных уравнений. Его достоинством является высокая точность. Алгоритм реализации метода Рунге-Кутты заключается в циклических вычислениях y_{i+1} на каждом $(i+1)$ шаге по следующим формулам.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)/6$$

Блок-схема решения дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты приведена на рис. 3.10.

Пример: Методом Рунге-Кутты вычислить на отрезке $[0;0,5]$ интеграл дифференциального уравнения $y' = x + y, y(0) = 1$, приняв шаг $h = 0,1$.

Решение: Покажем начало процесса вычисления y_j . Последовательно имеем:

$$k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = (x_0 + y_0)h,$$

$$\text{где } y' = f(x, y), y(x_0) = y(0) = 1$$

$$k_1^{(0)} = (0 + 1) \cdot 0,1 = 0,1$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) =$$

$$= 0,05 + (1 + 0,05) \cdot 0,1 = 0,11$$

$$k_3^{(0)} = 0,05 + (1 + 0,055) \cdot 0,1 = 0,1105$$

$$k_4^{(0)} = 0,1 + (1 + 0,1105) \cdot 0,1 = 0,12105$$

отсюда

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,1103 = 1,1103$$

Аналогично вычисляются дальнейшие приближения.

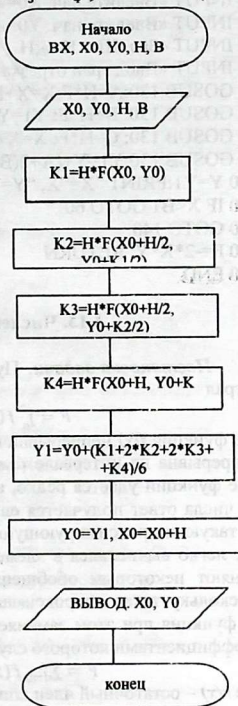


Рис. 3.10. Блок-схема метода Рунге-Кутты

Программа на языке Basic:

```
10 REM «РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕ-
ТОДОМ РУНГЕ-КУТТА»
20 INPUT «Введите нач. X0=»;X
30 INPUT «Введите нач. Y0=»;Y
40 INPUT «Зад. Шаг H=»;H
50 INPUT «Ввод гран отрезка B=»;B1
60 GOSUB 130:A=H*F:X=X+H/2:Y1=Y+A/2
70 GOSUB 130: B=H*F: Y1=Y+B/2
80 GOSUB 130: C=H*F: X=X+H/2:Y1=Y+C
90 GOSUB 130:Y1=Y+(A+2(B+C)+H*F)/6
100 Y=Y1:PRINT "X="X, "Y=",Y1
110 IF X<B1 GOTO 60
120 GOTO 140
130 F=-2*X*Y: RETURN
140 END.
```

3.13. Численное интегрирование

Постановка задачи. Пусть требуется найти определенный интеграл

$$F = \int_a^b f(x)p(x)dx, \quad p(x) = \rho(x) \quad (3.53)$$

где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а весовая функция $\rho(x)$ непрерывна на интервале (a, b) . Выразить интеграл через элементарные функции удается редко, а компактный и удобный для доведения до числа ответ получается еще реже. Поэтому обычно заменяют $f(x)$ на такую аппроксимирующую функцию $\varphi(x, a) \approx f(x)$, чтобы интеграл от нее легко вычислялся в элементарных функциях. Чаше всего $f(x)$ заменяют некоторым обобщенным интерполяционным многочленом. Поскольку такая аппроксимация линейна относительно параметров, то функция при этом заменяется некоторым линейным выражением, коэффициентами которого служат значения функции в узлах:

$$F = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x) + r(x) \quad (3.54)$$

где $r(x)$ – остаточный член аппроксимации.

Подставляя (3.54) в (3.53) получим формулу численного интегрирования (квадратурную формулу) $F = \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) + R$

$$C_i = \int_a^b \varphi_i(x) \rho(x) dx, \quad R = \int_a^b r(x) \rho(x) dx \quad (3.55)$$

$$F = \int_a^b f(x) \rho(x) dx = \sum_{i=0}^n \int_a^b f(x_i) \varphi_i(x) \rho(x) dx + \int_a^b r(x) \rho(x) dx = \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) + R;$$

где величины x_i – называют узлами, c_i – весами (коэффициентами) квадратурной формулы, а R – погрешностью или остаточным членом формулы. Интеграл приближению заменяется суммой, похожей на интегральную сумму, причем узлы и коэффициенты этой суммы не зависят от функции $f(x)$.

Изучена случай замена $f(x)$ алгебраическим много членом; обычно будем полагать $p(x) \equiv 1$. Случаи не единичного веса будут особо оговариваться. Погрешность зависит как от расположения узлов, так и от выбора коэффициента. При оценке погрешности функция $f(x)$ предполагается достаточно гладкой. Введем на $[a, b]$ равномерную сетку с шагом h , т.е. множество точек.

$$\omega_h = \{x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad hN = b - a\}$$

и представим интеграл $\int_a^b f(x) dx$ в виде суммы интегралов по отрезкам

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \quad (3.56)$$

Для построения формулы численного интеграла на всем отрезке $[a, b]$ достаточно построить квадратурную формулу для интеграла

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \quad (3.57)$$

на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ воспользоваться свойством (3.56).

3.14. Метод трапеции

На частичном отрезке эта формула имеет вид

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i))}{2} h$$

В общем виде $F = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]$ эта есть формула трапеций одна из простейших квадратурных формул.

Составная формула трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i) + f(x_{i-1}))}{2} h = h(0,5f_0 + f_1 + \dots + f_{N-1} + 0,5f_N),$$

где $f_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, N; hN = b - a, h = \frac{b-a}{N}$

$$f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1)$$

$[a, b]$ – отрезок разобьем на n равных частей. Для точек деления x_0, x_1, \dots, x_n найдем координаты (рис.3.11): $y_0 = f(x_0); y_1 = f(x_1); \dots; y_n = f(x_n)$.

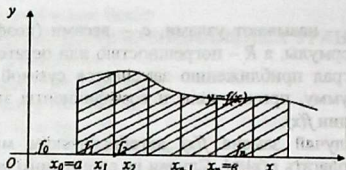


Рис. 3.11.

Полученные криволинейные трапеции заменим трапециями, тогда площадь криволинейной трапеции может быть выражена через сумму площадей полученных трапеций:

$$S = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + \dots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)(x_n - x_{n-1})$$

но так, как

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$$

Поэтому

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n}(y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n)$$

Объединив одинаковые члены имеем:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n}(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})),$$

где $x_1 - x_0 = h$, $b - a = n \cdot h$, $h = \frac{b-a}{n}$

На рисунке 3.12 приводится блок-схема решения определенного интеграла методом трапеций:

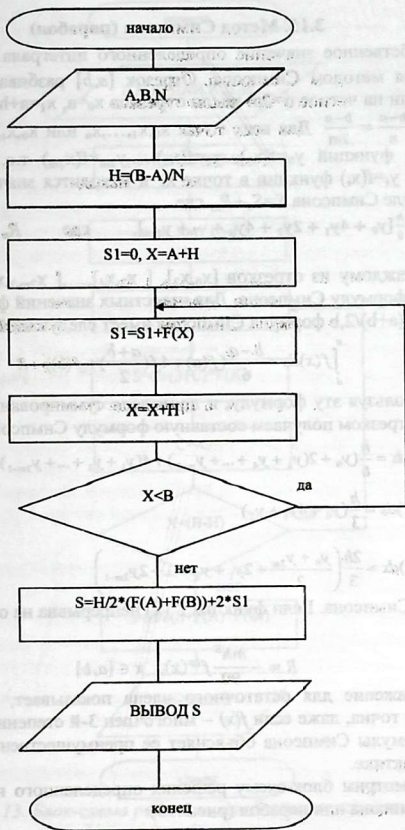


Рис. 3.12. Блок-схема метода трапеций

3.15. Метод Симпсона (парабол)

Собственное значение определенного интеграла $S = \int_a^b f(x)dx$ находится методом Симпсона. Отрезок $[a, b]$ разбивается на $n=2m$ частей или на четное $n=2m$ число отрезков $x_0=a, x_1=a+h, \dots, x_n=b$ с шагом $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$. Для всех точек x_0, x_1, \dots, x_n или x_0, x_1, \dots, x_{2m} найдем значения функций $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1), \dots, y_{2m}=f(x_{2m})$ т.е. вычисляются значения $y_i=f(x_i)$ функции в точке x_i и находится значение интеграл по формуле Симпсона $S=S_n+R_n$, где

$$S = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + y_{2m}],$$
 где R_n – остаточный член.

К каждому из отрезков $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2m-2}, x_{2m}]$ применим простую формулу Симпсона. Для известных значений функций в трех точках $a, (a+b)/2, b$ формула Симпсона имеет следующий вид

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) + R$$

Используя эту формулу, и произведя суммирование интегралов по всем отрезком получаем составную формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6} (y_0 + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + y_{2m}) + R$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{3} \left(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + \dots + 2y_{2m-1} \right)$$

формула Симпсона. Если функция $f^{(iv)}(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$R = -\frac{mh^5}{90} f^{(iv)}(x), \quad x \in [a, b]$$

Выражение для остаточного члена показывает, что формула Симпсона точна, даже если $f(x)$ – многочлен 3-й степени. Эта особенность формулы Симпсона объясняет ее преимущественное применение на практике.

Рассмотрим блок-схему решения определенного интеграла методом Симпсона или парабол (рис.3.13):

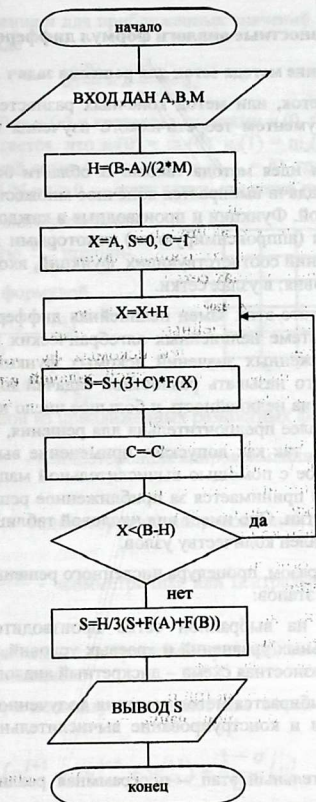


Рис. 3.13. Блок-схема решения определенного интеграла методом Симпсона

3.16. Разностные аналоги формул дифференцирования

Применение метода сеток для решения задач

Метод сеток, или метод конечных разностей, является эффективным инструментом теоретического изучения конвективных процессов.

Основная идея метода такова. В области определения дифференциальной задачи выбирается конечное множество точек узлов, называемое сеткой. Функции и производные в каждом узле приближенно заменяются (аппроксимируются) некоторыми линейными комбинациями значений соответствующих функций, входящих в уравнения и краевые условия; в узлах сетки.

В результате этих замен нелинейная дифференциальная задача сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомых функций в узлах. Такую систему принято называть разностной задачей или разностной схемой. Несмотря на нелинейность и большое число неизвестных, разностная задача более предпочтительна для решения, чем исходная дифференциальная, так как допускает применение вычислительной техники. Найденное с помощью вычислительной машины решение разностной задачи принимается за приближенное решение исходной задачи в узлах сетки. Оно имеет вид числовой таблицы, размер, которого пропорционален количеству узлов.

Таким образом, процедура численного решения задач состоит из трех основных этапов:

❖ Сначала на выбранной сетке производится аппроксимация дифференциальных уравнений и краевых условий, в результате которой строится разностная схема – дискретный аналог исходной задачи.

❖ Затем выбирается метод решения полученной нелинейной разностной задачи и конструирование вычислительного алгоритма завершается.

❖ Заключительный этап – программная реализация этого алгоритма на ЭВМ.

Для одномерного уравнения теплопроводности

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_v, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

и применяя обозначения u для приближенных значений температуры, можно записать в виде

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q_v$$

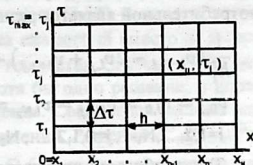
с начальным $u(x, 0) = u_0(x)$ и краевым условиями $u(0, t) = m_1(t)$, $u(1, t) = m_2(t)$ [предполагается, что $u_0(0) = m_1(0)$, $u_0(1) = m_2(0)$] на прямоугольной равномерной сетке с узлами $(x_i = ih, t_j = jt)$, где $i = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, h = 1/N$ и $t > 0$ — шаги сетки, где сетка имеет вид:

для получения сеточного уравнения

заменяем производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ прибли-

женной разностной формулой

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$



Для замены производной $\frac{\partial u}{\partial t}$ можно

воспользоваться одной из приближенных разностных формул:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta \tau} \quad - \text{«односторонняя аппроксимация вперед»};$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta \tau} \quad - \text{«односторонняя аппроксимация назад»}.$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta \tau} \quad - \text{«симметричная или центральная разностная аппроксимация»}.$$

Кроме того, начальные и граничные условия тоже заменяются разностной аппроксимацией.

Наиболее часто используемая разностная схема выглядит так (схема с весами):

$$\frac{1}{\tau} (u_i^{j+1} - u_i^j) = \frac{\sigma}{h^2} (u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}) + \frac{1-\sigma}{h^2} (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j)$$

$$i=1, 2, \dots, N-1, j=0, 1, 2, \dots,$$

$$u_i^j = u(x_i, t_j) \quad u_i^0 = u_0(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$u_0^j = \mu_1(t_j), \quad u_N^j = \mu_2(t_j)$$

где s — некоторый параметр.

Для двумерного уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), \quad 0 < x, \quad y < 1,$$

с однородными краевыми условиями $u(0, y) = u(x, 0) = u(1, y) = u(x, 1) = 0$ на прямоугольной равномерной сетке с узлами $x_{i,j} = i_1 h_1, y_{i,j} = i_2 h_2$, где $i_1 = 0, 1, \dots, N_1, i_2 = 0, 1, \dots, N_2, h_1 = 1/N_1, h_2 = 1/N_2$, наиболее употребительной является разностная схема:

$$\frac{1}{h_1^2} (v_{l-1,j} - 2v_{l,j} + v_{l+1,j}) + \frac{1}{h_2^2} (v_{l,j-1} - 2v_{l,j} + v_{l,j+1}) = -f_{l,j}$$

$$v_{0,j} = v_{i,0} = v_{N_1,j} = v_{i,N_2} = 0$$

$$i=1,2, \dots, N_1-1, j=0,1,2, \dots, N_2-1$$

Таким образом, получается дискретный аналог исходной задачи. Система разностных уравнений приводится к системе линейных или нелинейных алгебраических уравнений и выполняется их решение.

Способы решения линейных и нелинейных систем уравнений разделяют в на 2 группы. Первые, точные методы представляющие собой конечные алгоритмы для вычисления корней системы (такowymi например, являются правило Крамера, метод Гаусса, метод главных элементов, метод квадратных корней и др.).

Вторые, итерационные методы позволяющие получить корни системы с заданной точностью путем сходящихся бесконечных процессов (к числу таковых относят, метод итераций, метод Зейделя, метод релаксации).

Вследствие неизбежных округлений результаты даже точных методов являются округленными, причем оценка погрешностей корней в общем случае затруднительна. При использовании итерационных процессов, сверх того, добавляется погрешность метода. Эффективное применение итерационных методов существенно зависит от удачного выбора приближения и быстроты итерационного процесса.

Система линейных уравнений с n неизвестными (или, линейная система) в линейной алгебре — это система уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (3.58)$$

Здесь x_1, x_2, \dots, x_n — неизвестные, которые надо определить. $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ — коэффициенты системы — и b_1, b_2, \dots, b_m — свободные члены — предполагаются известными. Индексы коэффициентов (a_j) системы обозначают номера уравнения (i) и неизвестного (j), при котором стоит этот коэффициент, соответственно.

Система (3.58) называется однородной, если все её свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$), иначе — неоднородной.

Система (3.58) называется квадратной, если число m уравнений равно числу n неизвестных. Решение системы (3.58) — совокупность n чисел c_1, c_2, \dots, c_n , таких что подстановка каждого c_i вместо x_i в систему (3.58) обращает все её уравнения в тождества. Система (3.58) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у нее нет ни одного решения. Совместная система вида (3.58) может иметь одно или более решений. Решения $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_n^{(1)}$ и $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \dots, c_n^{(2)}$ совместной системы вида (3.58) называются различными, если нарушается хотя бы одно из равенств: $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_n^{(1)} = c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \dots, c_n^{(2)}$ соответственно

Совместная система вида (3.58) называется определенной, если она имеет единственное решение; если же у нее есть хотя бы два различных решения, то она называется неопределенной. Если уравнений больше, чем неизвестных, она называется переопределенной.

Контрольные вопросы к главе 3

1. Какие типы задач решают с использованием компьютеров?
2. Этапы решения задач с использованием компьютера (ЭВМ).
3. Как перейти от простейших расчетов к детальному математическому моделированию?
4. Что представляют собой численные методы?
5. Какой метод исследования называется вычислительным экспериментом?
6. Как понимаете Корректность численного метода?
7. Какие задачи называются устойчивыми, а какие - неустойчивыми?
8. Что такое погрешность численного метода?
9. Как отличается прямые и итерационные методы?
10. В чем заключается суть метода Гаусса
11. Что позволяет итерационные методы?
12. Чем отличается итерационные методы Якоби и Зейделя?

13. В чем суть задачи Коши?
14. Как применяется метод последовательных приближений?
15. Какова отличия метода Эйлера и Рунге-Кутты?
16. Зачем численное интегрирование и почему интеграл заменяется суммой?
17. Объясните отличие метода трапеции и метода Симпсона (парабол).

Контрольные задания к главе 3

- 1) Вычислить методом трапеций значения интеграла интегрирований на 60 частей для конкретного вычислить точное значение интегральное для $|k| \leq 0,9$
- 2) $\int_a^b \frac{e^x - x^2}{x} dx$ Составит программу для вычисления значения определенного интеграла $z =$ с точностью ϵ .
- 3) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2,5 = 0$ Составить программу нахождения корня уравнения $x +$ методом деления пополам на отрезке от 0,4 до 1х точностью $\epsilon = 10^{-4}$.
- 4) Методом итераций найти корень уравнения $\arcsin(2x+1) - x^2 = 0$, расположенный на отрезке $[-0,5; 0]$ с абсолютной.
- 5) Погрешностью $\epsilon = 10^{-4}$. Начинает число итераций, необходимых для вычисления корня.

Глава 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА В MATLAB

4.1. Математический пакет MATLAB

MatLab (фирма MathWorks). Эта система создана для работы в среде Windows и представляет собой интерактивную среду для вычислений и моделирования, причем она может работать как в режиме непосредственных вычислений, так и в режиме интерпретации написанных программ [82-83]. Сильная сторона системы – обеспечение всех операций с матрицами и векторами. Работа с матрицами в MatLab организована достаточно просто. Матрицы можно вводить несколькими способами: вводить полный список элементов; загружать матрицы из внешних файлов; генерировать матрицы, используя встроенные функции; создавать матрицы с помощью собственных M-файлов.

Численное значение или аналитическая формула, а также сообщения системы выводятся на экран в виде списка. Помимо обычных алгебраических вычислений система имеет огромный набор встроенных функций, а также имеется возможность создавать пользовательские функции. В системе очень хорошо реализовано построение двух и трехмерных изображений, в том числе динамически изменяющихся.

Вычислительная система MatLab (Matrix Laboratory), которая представляет собой достаточно универсальную среду, включающую не только выполнение вычислений, но и визуализацию результатов вычислений в виде диаграмм различного типа. MatLab называют языком высокопроизводительных расчетов, позволяющий:

- ◆ математические вычисления;
- ◆ создание алгоритмов;
- ◆ моделирование;
- ◆ анализ данных, исследования и визуализацию;
- ◆ создание научной и инженерной графики;
- ◆ разработку приложений, включая создание графического интерфейса.

Основным элементом данных в MatLab является массив, что позволяет решать различные задачи, связанные с техническими вычислениями, особенно в которых используются матрицы и вектора. В некоторых случаях, когда решаются небольшие задачи, применение MatLab оказывается более предпочтительным с точки зрения скорости создания вычислительного проекта и оформления результатов, чем при написании программ на «скалярных языках», таких как Си или Фортран.

Система MatLab состоит из пяти основных частей:

- языка MatLab;
- среды MatLab-набора инструментов и приспособлений для программистов пользователей, включающего средства управления переменными, вводом выводом данных, а также создания, отладки М-файлов (текстовых файлов, содержащих код MatLab) и приложения MatLab;
- управляемой графики - графической системы MatLab, которая включает в себя команды высокого уровня для визуализации двух- и трехмерных данных обработки изображений, анимации и иллюстрированной графики. Имеется, также возможность редактирования внешнего вида графики, т.к. в ее состав включены и команды низкого уровня.
- библиотеки математических функций – обширной коллекции вычислительных алгоритмов от элементарных (сумма, синус, косинус, комплексная арифметика и т.п.) до более сложных, таких как обращение матриц, нахождение собственных значений, функции Бесселя, быстрое преобразование Фурье.
- программного интерфейса – библиотеки, которая позволяет писать программы на Си и Фортране и взаимодействует с MatLab.

Кроме названных инструментов в MatLab встроена интерактивная система Simulink, применяемая для моделирования линейных, нелинейных, непрерывных, дискретных, многомерных динамических систем.

4.1.1. Графический пользовательский интерфейс MatLab

Рабочий стол (Desktop) системы содержит следующие инструментальные окна (рис. 4.1.):

- **Command Window** (*Командное окно*) – в этом окне осуществляется ввод команд MatLab и их выполнение.
- **Command History** (*История команд*) – хранит все команды, введенных ранее пользователем в **Command Window**. Можно их копировать и выполнять.
- **Workspace** (*Окно рабочего пространства*) - показывает текущий набор переменных, созданных пользователем в командном окне. Здесь можно увидеть их имена (колонок **Name** (*Имя*)), значения скалярных переменных (колонок **Value** (*Значение*)) и тип представляемых данных (колонок **Class** (*Тип данных*)). В командном окне такую же инфор-

мацию можно увидеть после исполнения команды *whos*.

Array Editor (Редактор массивов). Для его вызова достаточно щелкнуть по имени переменной в поле **Workspace**.

- **Current Directory (Текущий каталог)** - просмотр и изменение текущего каталога.

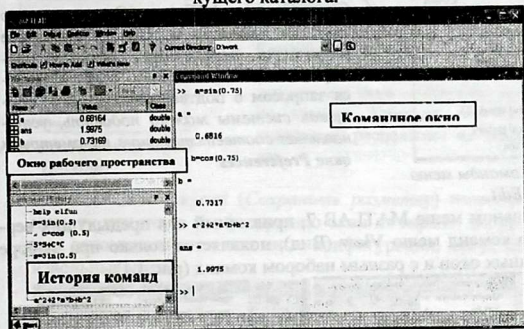


Рис. 4.1. Общий вид главного окна MATLAB 7.1

Команды строки меню (рис. 4.2).

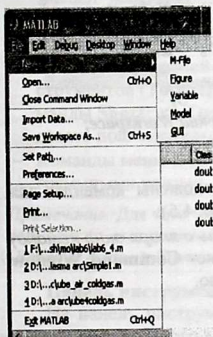


Рис. 4.2. Команды меню File

Меню **File (Файл)** содержит список обычных команд для большинства прикладных программ:

- **New (Создать);**
- **Open (Открыть);**
- **Close Command Window (Закреть окно команд)** - дублирует соответствующую кнопку в **Command Window (Окно команд);**
- **Save Workspace As (Сохранить рабочее пространство как);**
- **Import Data (Импортировать данные).**
- Команда **Set Path (Задать путь)** позволяет пополнить список каталогов, просматриваемых системой, или изменить порядок их просмотра.
- Настройка параметров системы выполняется в окне **Preferences (Предпочтения).**

Под ними расположена часть меню со списком последних файлов, с которыми работал пользователь.

View	Graphics	Debug	Desk
Undo			Ctrl+Z
Redo			Ctrl+Y
Cut			Ctrl+X
Copy			Ctrl+C
Paste			Ctrl+V
Duplicate			Ctrl+D
Paste to Workspace...			
Select All			Ctrl+A
Delete			Delete
Rename			
Edit Value			
Find...			
Find Files...			
Clear Command Window			
Clear Command History			
Clear Workspace			

Рис. 4.3. Команды меню Edit

В главном меню MATLAB 7, привычный для предыдущих версий набор команд меню View (Вид), появляется только при выборе определенных окон и с разным набором команд (рис.4.4).

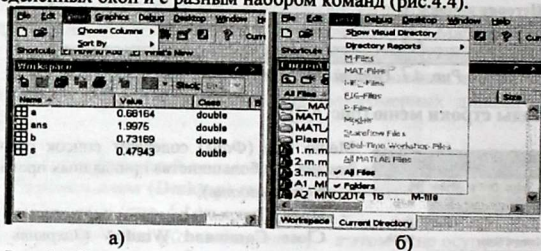


Рис. 4.4. Команды меню View: а) при выборе окна Workspace; б) при выборе окна Current Directory.

В меню Desktop (Рабочий стол), расположены команды для отображения окон и панелей инструментов (рис. 4.5):

- Команда **Undock Command Window** (Снять с якоря окно команд) разъединяет состыкованные окна и позволяет **Command Window** (Окно команд) перемещаться самостоятельно.

Меню Edit (Правка) (рис. 4.3) содержит характерный для любого редактора набор команд.

Последняя группа команд позволяет произвести очистку соответствующих окон.

- **Clear Command Window** (Очистить окно команд),
- **Clear Command History** (Очистить историю команд) и **Clear Workspace** (Очистить переменные рабочего пространства) по умолчанию сопровождается запросом о подтверждении. Эти сообщения системы можно подавить, устанавливая соответствующие параметры в окне Preferences



Рис. 4.5. Команды меню Desktop.

- Команда **Desktop Layout** (Разметка рабочего стола) определяет количество и расположение одновременно видимых панелей среды. Можно выбрать конфигурацию среды по умолчанию (**Default**), или сохранить на экране только одно команд (**Command Window Only**).
- Команда **History and Command Window** (Окна истории и команд) позволяет сохранить два окна — историю команд и окно команд. Команда **All Tabbed** (Со вкладками) располагает на экране все окна.

- Команда **Save Layout** (Сохранить разметку) позволяет сохранить ту или иную конфигурацию окон на экране. Файлы, в которых запоминались те или иные конфигурации, могут иметь произвольные имена.
- Команда **Organize Layouts** (Организовать разметку) необходима для выбора нужной конфигурации, т. е. одного из ранее сохраненных файлов.
- Группа команд **Command Window, Command History, Current Dictionary, Workspace, Help** (Справка), **Profiler** (Профайлер) позволяет установить окна, которые должны присутствовать на экране. Нужно установить или убрать галочки у соответствующей строки меню, чтобы появились или исчезли те или иные окна.
- Команды последней группы управляют видимостью панели инструментов (**Toolbar**), заголовков окон (**Titles**). С помощью команды **Shortcuts Toolbar** (Пользовательская панель) можно создавать пользовательские панели инструментов.
- Команды меню **Debug** (Отладка) необходимы при работе с программными кодами.

Примечание. Для того чтобы многочисленные окна не загромождали экран, можно выполнить команду **Desktop -> Command Window Only** (Рабочий стол -> Только окно команд).

Панель инструментов Toolbar

На панель инструментов вынесены наиболее часто используемые команды главного меню (рис.4.6). Только три из них дополняют главное меню.

- Кнопка **Simulink** обеспечивает вызов - системы имитационного моделирования.
- Кнопка **GUIDE** вызывает конструктор интерфейса, с помощью которого в диалоговом режиме формируется интерфейс приложения.
- Кнопка **Browse for Folder** обеспечивает просмотр каталогов.
- Кнопка **Go up one level** - переход по каталогам на один уровень вверх.

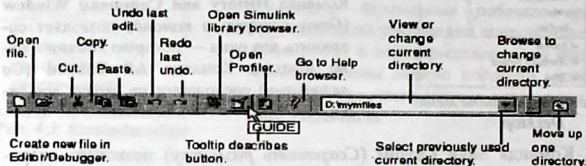


Рис. 4.6. Панель инструментов.



Кнопка **Start** обеспечивает доступ ко всем инструментам, ярлыкам, демо-файлам, документации MATLAB.

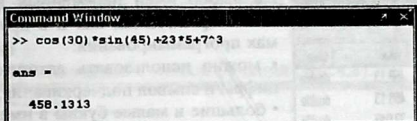
Работа в окне Command Window (Окно команд)

Окно **Command Window** превращает MATLAB в великолепный калькулятор практически с неограниченной памятью.

Знаки >> - символизируют начало текущей строки. В этой строке можно набирать формулы или команды, удовлетворяющие синтаксису языка MATLAB и завершающиеся нажатием клавиши **<Enter>**.

Примечание. Длинные команды, не помещающиеся целиком в одной строке, можно продолжать в одной или нескольких следующих, используя условный знак переноса в виде трех подряд идущих точек (...). Вслед за знаком переноса необходимо нажимать клавишу **<Enter>**.

Если все операнды формулы известны, то MATLAB вычисляет значение выражения, помещая его в системную переменную с именем **ans** (от англ. *answer* — ответ) – рис. 4.7:



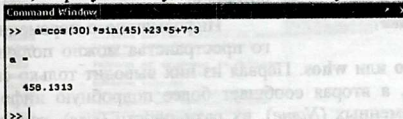
```
Command Window
>> cos(30)*sin(45)+23*5+7^3

ans =

458.1313
```

Рис. 4.7. Ввод выражений в окне *Command Window*.

Если, ввести переменную, например *a*, которой присваивается значение выражения, то результат будет выглядеть следующим образом:



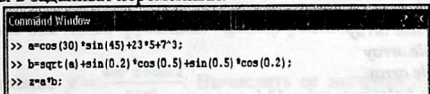
```
Command Window
>> a=cos(30)*sin(45)+23*5+7^3

a =

458.1313

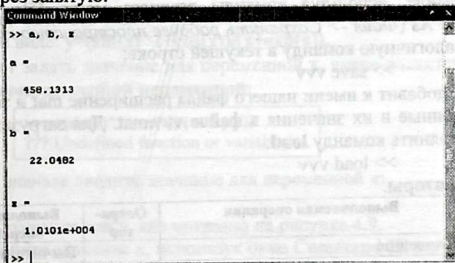
>> |
```

Точка с запятой, завершающая набор командной строки, подавляет автоматический режим вывода результата вычислений, что удобно при многошаговых вычислениях, сохраняя промежуточные результаты в заданных переменных:



```
Command Window
>> a=cos(30)*sin(45)+23*5+7^3;
>> b=sqrt(a)+sin(0.2)*cos(0.5)+sin(0.5)*cos(0.2);
>> z=a*b;
```

Вывести переменные в этом случае можно просто, указав их имена через запятую:



```
Command Window
>> a, b, z

a =

458.1313

b =

22.0482

z =

1.0101e+004

>> |
```

Переменные рабочего пространства

Значения всех промежуточных переменных, использованные в многошаговых вычислениях, MATLAB запоминает в рабочем пространстве (**Workspace**).

Name	Value	Class
a	458.13	double
ans	458.13	double
b	22.048	double
z	10101	double

На выбор имен переменных накладываются ограничения, как и в других системах программирования:

- можно использовать латинские буквы, цифры и символ подчеркивания;
- большие и малые буквы в именах различаются;
- имя должно начинаться с буквы;
- длина имени не должна превышать 63 символов.

Информацию о переменных рабочего пространства можно получить, набрав

команду **who** или **whos**. Первая из них выводит только список имен переменных, а вторая сообщает более подробную информацию об именах переменных (*Name*), их размерности (*size*), количестве занятых байтов в оперативной памяти (*Bytes*) и классе объектов, представляющих соответствующий тип данных (*class*), например:

```
>> whos
```

```
Name Size Bytes Class
a 1x1 8 double array
ans 1x1 8 double array
b 1x1 8 double array
z 1x1 8 double array
```

```
Grand total is 4 elements using 32 bytes
```

Имена и значения переменных рабочего пространства можно запомнить в файле, используя команды главного меню **File -> Save Workspace As** (*Файл -> Сохранить рабочее пространство как*), либо набрав аналогичную команду в текущей строке:

```
>> save vvv
```

MATLAB добавит к имени нашего файла расширение **mat** и запомнит все переменные и их значения в файле **vvv.mat**. Для загрузки достаточно выполнить команду **load**:

```
>> load vvv
```

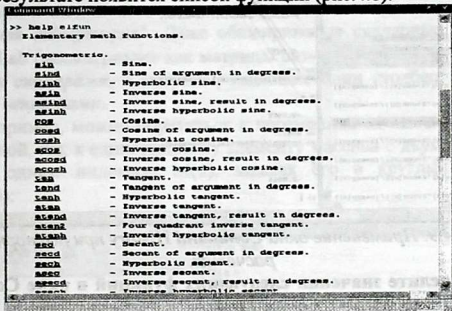
Операторы.

Оператор	Выполняемая операция	Оператор	Выполняемая операция
+	Сложение	-	Вычитание
*	Умножение	/	Деление
\	Левостороннее деление, т.е. если ввести 2\5, то будет выполнено деление таким образом: 5:2=2,5	^	Возведение в степень

Для вывода справки по элементарным функциям следует ввести команду:

```
>> help elfun
```

В результате появится список функций (рис.4.8).



```
>> help elfun
Elementary math functions.

Trigonometric.
sin          - Sine.
sind         - Sine of argument in degrees.
sinh         - Hyperbolic sine.
asin         - Inverse sine.
asind        - Inverse sine, result in degrees.
asinh        - Inverse hyperbolic sine.
cos          - Cosine.
cosd         - Cosine of argument in degrees.
cosh         - Hyperbolic cosine.
acosh        - Inverse cosine.
acosd        - Inverse cosine, result in degrees.
acosh        - Inverse hyperbolic cosine.
tan          - Tangent.
tand         - Tangent of argument in degrees.
tanh         - Hyperbolic tangent.
atan         - Inverse tangent.
atand        - Inverse tangent, result in degrees.
atanh        - Four quadrant inverse tangent.
atanh        - Inverse hyperbolic tangent.
sec          - Secant.
secd         - Secant of argument in degrees.
sech         - Hyperbolic secant.
asec         - Inverse secant.
asecd        - Inverse secant, result in degrees.
asech        - Inverse hyperbolic secant.
```

Рис. 4.8. Вывод списка функций в окне Command Window.

Вычисление значений функций. Пример решения в окне Command Window.

Дано выражение $y = \frac{\sin^2 x + \cos x}{x + e^x}$. Вычислить ее значения для $x \in [1; 10]$.

Решение:

- Следует записать данное выражение по правилам MATLAB в линейном виде: $y = (\sin(x)^2 + \cos(x)) / (x + \exp(x))$.
- Следует задать значение для переменной x , иначе появится ошибка о неопределенной переменной:

```
>> y=(sin(x)^2+cos(x))/(x+exp(x))
??? Undefined function or variable 'x'.
```

Поэтому, вначале введите значение для переменной x :

```
>> x=1;
```

а затем выражение для y , как показано на рисунке 4.9.

Измените значение x , используя окно **Command History**:

- в окне **Command History** выберите двойным щелчком левой клавиши мыши строку $x=1$, затем измените эту строку на $x=2$;
- затем, в окне **Command History** выберите выражение для y и нажмите клавишу <Enter>, чтобы вычислить новое значение.

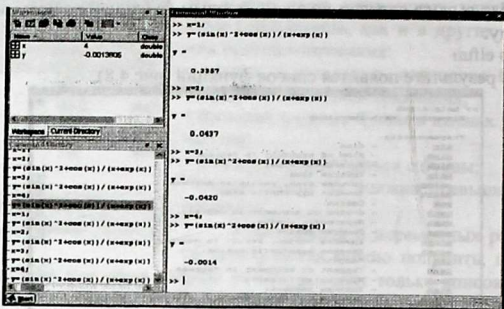


Рис. 4.9. Применение окна *Command History* при повторных расчетах.

Вычислите значения следующих функций в окне *Command Window*:

$x \in [1; 10]$

1. $y = 12x^2 + 7x - 16x$;	6. $y = x^3 : 16 + 5,5x - 10$
2. $y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	7. $y = \frac{12,5}{x^2 + 25} + x$
3. $y = \sqrt{\frac{2x + \sin(3x)}{3,56}}$	8. $y = 2,8 \sin x + 3x$
4. $y = \frac{3,2 + \sqrt{1+x}}{ 5x }$	9. $y = \frac{x^2 - 7x + 10,4}{x^2 - 8x + 12,5}$
5. $y = \frac{11,5}{x^2 + 25} + x^3$	10. $y = \frac{x^3 - 5x + 10,4}{x^2 - 8x + 2,5}$

Контрольные вопросы:

1. Что такое MATLAB?
2. Какие задачи можно решать в MATLAB?
3. Какие основные элементы содержит пользовательский графический интерфейс MATLAB?
4. Что такое **Desktop**, какие элементы содержатся в нем?
5. Что такое **Command Window**, его назначение?
6. Что такое **Command History**, его назначение?
7. Что такое **Workspace**, для чего служит этот элемент?
8. Каким образом можно подавить вывод результатов вычислений?
9. Каким образом можно получить справку о функциях MATLAB?

4.1.2. Операции с матрицами в MatLab.

Основные понятия и определение матрицы.

Основным видом данных, которые используются в пакете **MatLab**, являются матрицы, что и отражено в названии пакета. **MatLab** сокращенно с английского названия *Matrix Laboratory* — переводится "матричная лаборатория". Даже общепринятые скалярные переменные **MatLab** рассматривает как матрицы размерности 1×1 . Матрицы являются *скалярами*, а матрицы, имеющие один столбец или одну строку — *векторами*.

Например, можно обратиться к переменной **M** как к скалярной переменной, как к единственному элементу массива с двумя $M(1,1)$ и даже с одним индексом $M(1)$, задавая его в круглых скобках (рис.4.10):

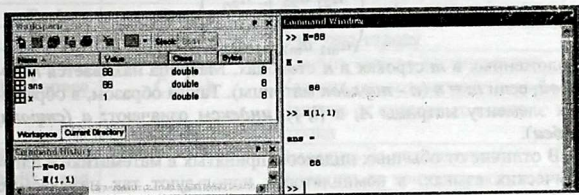


Рис. 4.10. Примеры обращения к переменной **M**.

Матрица — математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов целых, действительных или комплексных чисел, которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Количество строк и столбцов матрицы задают размер матрицы.

Матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений. В этом случае количество строк матрицы соответствует числу уравнений, а количество столбцов — количеству неизвестных. В результате решение систем линейных уравнений сводится к операциям над матрицами [84-86].

Пусть система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Эта система состоит из m линейных уравнений относительно n неизвестных. В матричном виде это уравнение запишется: $Ax=b$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A – матрица, матрица коэффициентов системы линейных уравнений;

x – вектор-столбец, вектор неизвестных;

b – вектор-столбец, некоторый заданный вектор.

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица $m \times n$ чисел a_{ij} , где i и j обозначают индексы, причем $i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

расположенных в m строках и n столбцах. Матрица называется *квадратной*, если $m = n$ (n – порядок матрицы). Таким образом, в обращении к элементу матрицы A , $a(i, j)$, индексы означают: a (строка, столбец).

В отличие от обычных индексов, принятых в математике и алгоритмических языках, в компиляторах используют так называемые *приведенные индексы*, определяющие *позицию* соответствующего элемента массива в оперативной памяти. Так как i оперативная память использует линейную адресацию своих ячеек, то для одномерного массива приведенный индекс совпадает с обычным. Для двумерного массива A с количеством элементов $m \times n$ приведенный индекс k элемента $a(i, j)$ зависит от способа распределения элементов в памяти. Matlab по аналогии с Fortran использует отсчет индексов в массивах от 1 и располагает элементы матрицы по столбцам. Поэтому, элементу $a(i, j)$ в памяти предшествуют $(j-1)$ столбцов по m элементов в каждом, и этот элемент расположен на месте с номером $k=(j-1) * m + i$. Matlab, наряду с традиционными индексами в многомерных массивах, позволяет пользоваться и единственным приведенным индексом, что несколько повышает скорость вычислений.

Таким образом, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ в машинной памяти будет храниться в следующей последовательности: 2, 4, 3, 6, 3, 5, 9, 8, 1.

Работа в окне Command Window

Для работы в *Командном окне* удобно использовать клавиша и сочетания клавиш, приведенные на рисунке ниже, следует их запомнить.

Клавиши	Клавиши управления	Результат
↑	Ctrl + p	Вызов предыдущей строки
↓	Ctrl + n	Вызов следующей строки
←	Ctrl + b	Переход на один символ назад
→	Ctrl + f	Переход на один символ вперед
Ctrl + →	Ctrl + r	Переход на одно слово направо
Ctrl + ←	Ctrl + l	Переход на одно слово влево
Home	Ctrl + a	Переход к началу строки
End	Ctrl + e	Переход к концу строки
Esc	Ctrl + u	Очистить строку
Delete	Ctrl + d	Удалить символ после курсора
Backspace	Ctrl + h	Удалить символ перед курсором
	Ctrl + k	Удалить от курсора до конца строки
Shift+home		Выделить до начала строки
Shift + end		Выделить до конца строки

Ввод матрицы

Матрицы можно ввести в Matlab несколькими способами:

- вводить полный список элементов;
- загружать матрицы из внешних файлов;
- генерировать матрицы, используя встроенные функции;
- создавать матрицы с помощью ваших собственных функций в М-файлах.

При вводе, нужно следовать нескольким основным условиям:

- отделять элементы строки пробелами или запятыми;
- использовать точку с запятой “;” для обозначения окончания строки;
- заключать весь список элементов квадратные скобки “[]”.

Для создания строки элементов матрицы A в окне **Command Window** следует ввести числа отделяя их пробелом:

```
>> A = [12 62 93 -8 22] <ENTER> или запятой,
```

```
>> A = [12, 62, 93, -8, 22] <ENTER>
```

появится результат ввода в виде:

```
A =  
12 62 93 -8 22
```

Чтобы создать столбец элементов матрицы A, следует ввести числа, отделяя их точкой с запятой:

```
>> A = [12; 62; 93; -8; 22] <ENTER> ,
```

результат ввода отобразится в виде столбца элементов.

Матрица B, состоящая из 3 строк и 5 столбцов, вводится следующим образом:

```
>> B = [12 62 93 -8 22; 16 2 87 43 91; -4 17 -72 95 6] <ENTER> ,
```

результат будет иметь вид

```
B =  
12 62 93 -8 22  
16 2 87 43 91  
-4 17 -72 95 6
```

Размер матрицы можно определить с помощью команды `size` (имя матрицы)

```
>> size(B)
```

Чтобы вывести по строкам (рядам) используется двоеточие “ : “, вместо индекса столбца. Например, чтобы вывести элементы первой строки, нужно записать обращение к матрице таким образом:

```
>> B (1, :)
```

Результат будет иметь вид:

```
ans =  
12 62 93 -8 22 .
```

Чтобы вывести по столбцам используйте двоеточие “ : “, вместо индекса строки. Например, если записать в командной строке обращение к матрице B

```
>> B(:,1)
```

Результат будет иметь вид

```
ans =  
12  
16  
-4
```

Выделение подблока из матрицы

Пусть, имеется матрица A1, состоящая из 6 строк и 5 столбцов:

```
A1 =  
1 2 3 4 5  
2 3 4 6 7  
4 6 8 9 0  
1 3 6 9 9
```

3 5 6 7 8

1 2 3 4 6

Например, нужно выделить из этой матрицы подблок, состоящий из строк со второй по четвертую и столбцов с третьего по пятый. Для выделения указанного подблока следует записать обращение к матрице A1 таким образом:

>> A1(2:4, 3:5) <ENTER> ,

результат будет иметь вид

ans =

4 6 7

8 9 0

6 9 9

Добавление строчки к матрице

Чтобы добавить строчку к матрице A1, следует в командной строке ввести:

>> A1=[A1; 9 8 7 6 5]

результат будет иметь вид

A1 =

1 2 3 4 5

2 3 4 6 7

4 6 8 9 0

1 3 6 9 9

3 5 6 7 8

1 2 3 4 6

9 8 7 6 5 *добавленная строка*

Добавление столбца к матрице

Чтобы добавить столбец к матрице, например, A1, следует в командной строке ввести:

>> A1=[A1 [,9;9;8;8;7;7;6]]

A1 =

1 2 3 4 5 9

2 3 4 6 7 9

4 6 8 9 0 8

1 3 6 9 9 8

3 5 6 7 8 7

1 2 3 4 6 7

9 8 7 6 5 6

Ввод матрицы по столбцам.

При вводе следующим образом:

>> K=[[4;5],[5;6],[6;7]]

результат имеет вид

K =

4 5 6

5 6 7

Удаление строк и столбцов.

Для выполнения операций удаления строк и столбцов, следует создать копию существующей матрицы. При выполнении команды

```
>> Q=A1
```

будет создана матрица Q из A1:

Q =

1 2 3 4 5 9

2 3 4 6 7 9

4 6 8 9 0 8

1 3 6 9 9 8

3 5 6 7 8 7

1 2 3 4 6 7

9 8 7 6 5 5

Чтобы удалить из матрицы Q 2 – й столбец, следует ввести команду присвоения 2 столбцу пустых квадратных скобок:

```
>> Q(:,2)=[]
```

В результате матрица Q примет вид:

Q =

1 3 4 5 9

2 4 6 7 9

4 8 9 0 8

1 6 9 9 8

3 6 7 8 7

1 3 4 6 7

9 7 6 5 5

Чтобы удалить из матрицы Q 5 – ю строку, следует ввести команду присвоения 5 строке пустых квадратных скобок:

```
>> Q(5,:)=[] , в результате будет удалена 5-я строка.
```


Встроенные функции для генерирования матриц

eye	будет создана единичная матрица
diag	выделяет главную диагональ матрицы
freqspace	формирование массива частот для частотных откликов
linspace	формирование массива равноотстоящих чисел
logspace	формирование узлов логарифмической сетки
magic	будет создана матрица <i>магический квадрат</i>
meshgrid	формирование узлов двумерной и трехмерной сеток (для построения трехмерных графиков)
ones	будет создана единичная матрица
pascal	будет создана симметричная матрица
rand	будет создана матрица равномерно распределенных случайных чисел
randn	будет создана матрица нормально распределенных случайных чисел
repmat	
zeros	будет создана матрица из нулей

Выполните следующие примеры со встроенными функциями:

- 1) `eye(5,5)`
- 2) `Z=magic(5)`
- 3) `zeros(4,6)`
- 4) `ones(4)`
- 5) `diag(Z)`
- 6) `Z1=rand(4)`

Сумма элементов матрицы.

- Пусть матрица `Z1` создана с помощью функции **magic**, следующим образом:

`>> Z1=magic(5)`, т.е. генерируется матрица размером 5×5 , которая имеет вид

```
Z1 =
17 24 1 8 15
23 5 7 14 16
4 6 13 20 22
10 12 19 21 3
11 18 25 2 9
```

Выполнение команды

```
>> sum(Z1) или sum(Z1,1)
```

приведет к результату суммирования по столбцам

ans =

65 65 65 65 65

Выполнение команды

>> sum(Z1,2) приведет к суммированию по строкам

Особенность матрицы *магический квадрат* заключается в том, что сумма элементов по всем строкам и столбцам равны одному и тому же значению.

Сумма элементов по диагонали, записывается следующим образом:

>>sum(diag(Z1)) % сумма элементов по диагонали: ans = 65.

Нахождение суммы элементов по указанным строкам или столбцам.

• Пусть матрица M создана с помощью функции `rand`, которая генерирует псевдослучайные числа, распределенные в интервале $(0,1)$.

Таким образом, команда $M=rand(4)$, генерирует матрицу вида 4×4 :

$M =$

0.4218 0.6557 0.6787 0.6555

0.9157 0.0357 0.7577 0.1712

0.7922 0.8491 0.7431 0.7060

0.9595 0.9340 0.3922 0.0318

Чтобы округлить до целого, можно переписать команду генерирования матрицы, используя функцию `fix`:

>> $M=fix(rand(4)*10)$,

результат выполнения команды:

$M =$

8 6 9 9

9 0 9 4

1 2 1 8

9 5 9 1

• Чтобы найти сумму элементов четвертого столбца матрицы M , следует ввести команду вычисления суммы следующим образом:

>> $sum(M(1:4, 4))$ или >> $sum(M(:, 4))$ % сумма элементов 4-го столбца

• Чтобы найти сумму элементов первой строки матрицы M , следует ввести команду вычисления суммы следующим образом:

>> $sum(M(1,1:4))$ или >> $sum(M(1, :))$ % сумма элементов 1-й строки

• Соответственно, сумма элементов второй строки:

>> $sum(M(2, :))$

• Сумма элементов второй строки первого и второго столбца:

>> $sum(M(2, 1:2))$

- **Транспонирование матрицы**

' – означает операцию транспонирования, зеркального отображения матрицы относительно главной диагонали и меняет строки на столбцы. Например, транспонирование матрицы Z1 (магический квадрат, см. выше), приведет ее к виду

```
>> Z1'
ans =
 17 23 4 10 11
 24 5 6 12 18
 1 7 13 19 25
 8 14 20 21 2
 15 16 22 3 9
```

Линейные матричные операции.

Суммой двух матриц одинаковой размерности, называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых.

- Новую матрицу можно получить сложением существующих матриц M и N:

```
>> R=M+N
```

- По определению, чтобы умножить матрицу на число, нужно умножить на это число все элементы матрицы. Умножаем каждый элемент матрицы M на 10

```
>> M=M*10
```

- Произведение матриц определяется следующим образом. Пусть заданы две матрицы A и B, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй. Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

то произведением матриц A и B, называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, k.$$

Произведение матриц A и B обозначается AB, т.е. C=AB.

- **Замена значений** элементов матрицы. Пусть дана матрица M, размером 4×4 , имеющий вид:

M =

8 1 8 1

9 2 2 2

5 8 9 6

1 2 3 4

Чтобы заменить элементы в матрице, с первого до последнего с шагом равным 3, следует записать:

>> M(1:3:16) = -10 или M(1:3:end) = -10 % замена на число -10

Результат будет иметь вид

M =

-10 1 8 -10

9 2 -10 2

5 -10 9 6

-10 2 3 -10

- **Конкатенация матриц** - это объединение матриц для создания новой матрицы. Скобки [] используются не только для конструирования матриц, но и объединения. Выражение C = [A B] означает горизонтальную конкатенацию матриц A and B. Выражением C = [A; B] – вертикальную конкатенацию матриц A and B.

Например:

A = ones(2, 5) * 6; % матрицы 2×5 со значениями элементов равными 6;

A =

6 6 6 6 6

6 6 6 6 6

B = rand(3, 5); % матрицы 3×5 случайных значений:

B =

0.3517 0.5497 0.7572 0.5678 0.5308

0.8308 0.9172 0.7537 0.0759 0.7792

0.5853 0.2858 0.3804 0.0540 0.9340

Выполнение операции

>> C = [A; B] % вертикальная конкатенация A and B,

приведет к результату объединения матриц в виде:

C =

6.0000 6.0000 6.0000 6.0000 6.0000

6.0000 6.0000 6.0000 6.0000 6.0000

0.3517 0.5497 0.7572 0.5678 0.5308

0.8308 0.9172 0.7537 0.0759 0.7792

0.5853 0.2858 0.3804 0.0540 0.9340

Задания на самостоятельную работу

Создайте матрицы:

1) AA=	2) AA=	3) AA=	4) AA=	5) AA=	6) AA=
123456	23156	534612	1241315	5346	34561
234678	34678	467823	2363526	4678	46782
468909	68909	968409	3486637	9684	96840
136998	16996	961398	4699748	6761	96139
356786	36086	356786	5709869	3567	35678
123467	13679	123467	6898675	1234	12346
567895	67895			1286	23986
				2398	08145

Выделите из матриц указанные подблоки:

1) AA=	2) AA=	3) AA=	4) AA=	5) AA=	6) AA=
1234	909	7823	82	413	6761
2346	996	8409	40	635	3567
4689	086	1398	39	866	1234
1369			78	997	1286
			46	098	

Добавьте столбцы в матрицы с номерами 1, 2, 4, 6. Добавьте строки в матрицы с номерами 3, 5. Значения выбирайте самостоятельно.

Контрольные вопросы:

1. Что такое матрица?
2. Из каких элементов состоит матрица?
3. Как отобразится матрица, если вы введете матрицу таким образом C(:)?
4. Как узнать размер матрицы?
5. Какие функции используются для генерирования матриц MATLAB?

4.1.3. Графические функции в MatLab

Двумерная графика

Построение графиков различных функций является одним из способов визуализации результатов вычислений [87-88]. Элементарные графические функции системы MatLab позволяют построить на экране и вывести на печать следующие типы графиков: *линейный, логарифмический, полулогарифмический, полярный.*

MatLab предоставляет пользователям гибкие средства построения и редактирования графиков плоских и пространственных кривых, трехмерных поверхностей и некоторых геометрических фигур. Рассмотрим самые простые средства построения графиков и их ручного редактирования с целью включения в состав отчетной документации.

Простые графики в декартовых координатах. Функция `plot()`.

Чтобы построить график функции одной переменной $y=f(x)$, достаточно сформировать два вектора одинаковой размерности — вектор значений аргументов (x) и вектор соответствующих значений функции (y), и обратиться к функции `plot()`.

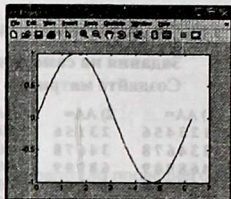


Рис. 4.11

Пример 1. Построение графика функции $y = \sin(x)$ (рис.4.11)

```
>> x = 0:pi/100:2*pi % x ∈ [0 до 2π], с шагом π/100
>> y = sin(x)
>> plot(x,y)
```

MatLab автоматически создает окно с заголовком *Figure 1*, размещает в нем стандартное меню и панель инструментов, выделяет в области клиента прямоугольное поле с графиком функции, производит соответствующее масштабирование и разметку по обеим координатам.

Примечание. Если обратиться к функции `plot` повторно, следует перед функцией указать команду *Figure*, чтобы появилось новое окно с заголовком *Figure 2* и в нем следующий график. Можно совместить оба графика в одном окне двумя разными способами. *Первый способ* - перед вызовом функции `plot` следует построить таблицы обеих функций, например, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . А при вызове функции `plot` указать их в списке аргументов. *Второй способ* - заключается в блокировании режима создания нового графического окна с помощью функции `hold on`.

Первый способ - при вызове функции `plot` указывается список аргументов:

Пример 2. Построение двух графиков в одном окне

```
>> x1=0:0.2:6.28; % x1 ∈ [0 до 6.28], шаг Δx1 =0.2
>> y1 = sin(x1);
>> y2=cos(x1);
>> plot(x1,y1,x1,y2)
```

Второй способ - блокирование режима создания нового графического окна функцией `hold on`:

```
>> plot(x1,y1)
>> hold on
```

>> plot(x1,y2)

MatLab автоматически сменит цвет отображения следующего графика.

• На выбор цвета, тип линий, маркеров графика может повлиять и пользователь, указав в функции *plot* дополнительные параметры - символы цвета, стиля маркера. Порядок следования символов - любой:

plot(x, y, 'цвет стиль маркер')

'цвет стиль маркер' – это 1 -, 2 -, 3- символьная строка, заключенная в одинарные кавычки и задающая тип цвета, стиля линий и маркеров.

Ниже в таблицах приведены:

Символы цвета

Символ цвета	Цвет графика	Символ цвета	Цвет графика
b	Синий (blue)	m	Малиновый (magenta)
c	Циановый (cyan)	r	Красный (red)
g	Зеленый (green)	w	Белый (white)
k	Черный (black)	y	Желтый (yellow)

Символы линий

Символ	Тип линии
-	сплошная линия
:	пунктирная линия
-.	штрихпунктирная линия
--	штриховая линия

Символы маркеров

Символ	Маркер	Символ	Маркер
.	Точка	d	Ромбик
o	Кружок	v	Треугольник вершиной вниз
x	Крестик	^	Треугольник вершиной вверх
+	Прямоугольный крестик	<	Треугольник вершиной влево
*	Снежинка	>	Треугольник вершиной вправо
s	Квадратик	p	Пятиконечная звезда
none	Отсутствие маркера	h	Шестиконечная звезда

Пример 2. Построение графика функций с указанием символов цвета, типа линий и маркеров.

а) указание только типов линий

(рис.4.12)

```
>> x=0:0.2:6.28;  
>> y1=sin(x);  
>> y2=cos(x);  
>> plot(x,y1,'-',x,y2,'')
```

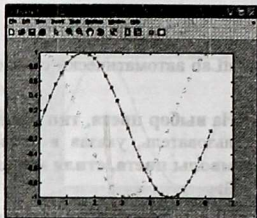


Рис. 4.12

б) указание типов линий, цвета линий и маркера (рис. 4.13).

```
>> x=0:0.2:6.28;  
>> y1=sin(x);  
>> y2=cos(x);  
>> plot(x, y1, '- m p', x, y2, '-. c o')
```

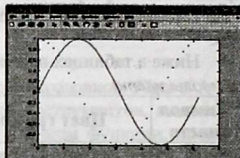


Рис. 4.13

Примечание. Если в стилиевой строке указан тип маркера, но не задан стиль линии, то табличные точки маркером метятся, но друг с другом отрезками прямых не соединяются.

Задание. Постройте график функции $y=e^{2\cos x}$, $x \in [0, 4\pi]$, шаг $\Delta x = \pi/15$.

Укажите: цвет линии – синий, тип линии – пунктирный, маркер – снежинка.

Оформление графиков.

Для каждого графика можно задать **заголовок** (функция `title`), **легенду** (функция `legend`), нанести **обозначение осей** (функции `xlabel`, `ylabel`) и **масштабную сетку** (функция `grid on`).

Пример 3. Добавление функции заголовка и легенды(рис.4.14):

```
>> x=0:0.2:6.28;  
>> y1=sin(x);  
>> y2=cos(x);  
>> plot(x,y1,'-',x,y2,'')  
>> title('Function sin & cos')  
>> legend('sin', 'cos', 4)
```

Легенда позволяет внести ясность в анализ изображения с несколькими графикам. Третий параметр в функции `legend` (этот чис-

ловой параметр можно написать в любом месте списка) управляет размещением легенды в графическом окне.

Можно повторить последнюю команду (\uparrow) и изменить на `legend('sin', 'cos', 0)` - третий параметр по таблице.

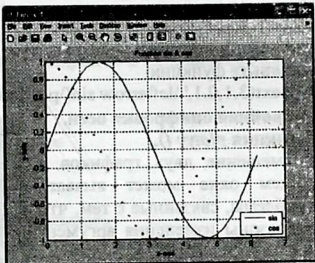


Рис. 4.14

Параметр легенды	Размещение легенды в графическом окне
-1	легенда размещается вне поля графика, вверху справа;
0	система выбирает лучшее место в поле графика, не перекрываемое данными;
1	легенда размещается в правом верхнем углу (по умолчанию — там же);
2	легенда размещается в левом верхнем углу поля графика;
3	легенда размещается в правом нижнем углу поля графика;
4	легенда размещается в левом нижнем углу поля графика.

- Добавление функции подписи осей и координатной сетки.

Синтаксис функций подписи осей:

`xlabel('text');` ; `ylabel('text');` ; `zlabel('text');`

`>> ylabel('y-axis')`

`>> xlabel('x-axis')`

`>> grid on`

Результат на графике, рис. 4.15. Чтобы отключить координатную сетку следует ввести: `>> grid off`

- Еще один элемент, который можно добавить для оформления графика это - функция `text`.

Синтаксис: `text(x,y,'string')`,

где (x,y) – координаты на текущем графике.

Использование `TEX` – представления позволяет применять греческие

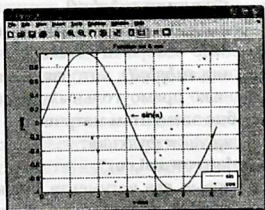


Рис. 4.15.

буквы, математические символы и различные шрифты (см. таблицу символов в справке Matlab).

Добавьте функцию

```
>> text(3.1,0.1,'leftarrow sin(\pi)', 'FontSize', 14)
```

• Двойная оцифровка осей.

Функция *plotyy()*.

Совмещение двух графиков в общем окне может вызвать проблемы, связанные с тем, что диапазоны изменения аргументов или значений функций не совпадают. В Matlab имеется функция *plotyy()*, которая производит двойную оцифровку осей, т.е. решает проблему совмещения графиков. Для первой функции цифруются ось *x* внизу, ось *y* слева, а для второй

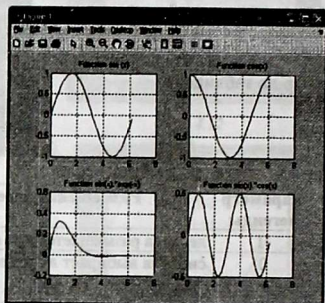


Рис. 4.16.

функции ось *x* размечается сверху, ось *y* — справа (рис. 4.16).

Цвет оцифровки при этом совпадает с цветом кривых.

Пример 4. Двойная оцифровка осей для совмещения графиков.

```
>> x=0:0.1:6.28;  
>> y1=sin(x);  
>> y2=sin(x)+cos(x);  
>> plotyy(x,y1,x,y2)
```

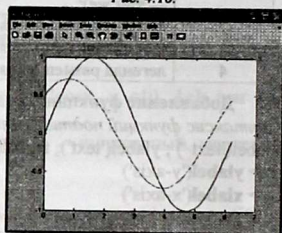


Рис. 4.17.

• Функция *subplot()*

Если в одном графическом окне необходимо отобразить большее число графиков, следует использовать функции *subplot()*, которая позволяет разделить область рисования на несколько прямоугольных областей равного размера, расположенных подобно элементам матрицы

Обращение к функции:

```
subplot(row,col,cur),
```

где первые два аргумента задают количество рядов (*row*) и колонок (*col*), на которые делится окно построения графиков. Третий параметр

(sur) объявляет порядковый номер подобласти, в котором очередная функция *plot* будет строить свой график (рис.4.17).

Пример 5. Представление четырех графиков в подобластях одного графического окна.

```
>>x=0:0.2:2*pi;
>>y1=sin(x);
>>y2=cos(x);
>>y3=y1.*exp(-x);
>>y4=y1.*y2;
>> subplot(2,2,1); plot(x,y1); % 1-я подобласть
>> title('Function sin (x)') % заголовок 1 –го подграфика
>> grid on % координатная сетка для 1-ого подграфика
>> subplot(2,2,2);plot(x,y2); % 2-я подобласть
>> title('Function cos(x)') % заголовок 2 –го подграфика
>> grid on % координатная сетка для 2-ого подграфика
>> subplot(2,2,3);plot(x,y3); % 3-я подобласть
>> title('Function sin(x).*exp(-x)')
>> grid on
>> subplot(2,2,4);plot(x,y4); % 4-я подобласть
>> title('Function sin(x).*cos(x)')
>> grid on
```

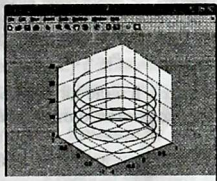


Рис.4.18

Трехмерная графика

В MatLab имеется несколько графических функций позволяющих построить трехмерные графики.

- **Функция plot3()** – трехмерный аналог функции **plot()**.

Синтаксис:

plot3(X1,Y1,Z1,...) % X1, Y1, Z1 – вектора одной длины. Функция **plot3()** строит точки с координатами X1, Y1, Z1 и соединяет их линиями.

plot3(X1,Y1,Z1,LineSpec,...) % LineSpec задает 'тип цвета, стиля линий и маркеров'

plot3(...,'PropertyName',PropertyValue,...) % позволяет задать значения свойств графического объекта Line (линий), соответствующих построенному графику.

h = plot3(...) % возвращает вектор дескрипторов для всех графических объектов Line текущего объекта Axes.

Пример 6. Построение графика спирали в виде линий в трехмерном представлении (рис. 4.18).

```
>> t = 0:pi/50:10*pi;
>> plot3(sin(t),cos(t),t)
>> grid on
>> axis square % устанавливает одинаковый диапазон и одинаковые
                расстояния между метками по осям.
```

Пример 7. Построение графика функции $z=x*\exp(-x^2-y^2)$ (рис. 4.19).

```
[x,y]=meshgrid([-2:0.1:2]); % для формирования двумерных массивов, представляющих сетку,
z=x.*exp(-x.^2-y.^2);
plot3(x,y,z)
```

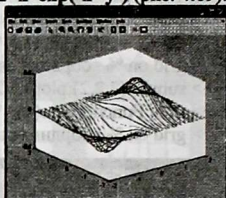


Рис.4.19

- **Функция meshgrid()** используется для формирования прямоугольной сетки.

Синтаксис:

$[X,Y]=\text{meshgrid}(x,y)$ - задает сетку на плоскости x - y в виде двумерных массивов X,Y , которые определяются одномерными массивами x и y .

$[X,Y]=\text{meshgrid}(x)$ - упрощенная форма записи для функции $[X,Y]=\text{meshgrid}(x,x)$

$[X,Y,Z]=\text{meshgrid}(x,y,z)$ - формирует трехмерную сетку.

Пример 8. Формирование двумерного массива с помощью функции meshgrid().

```
>> x=[-2:1:2] - значения на оси x: -2 -1 0 1 2
>> y=[0:1:5] - значения на оси y: 0 1 2 3 4 5
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> X
>> Y
>> Z=-x.*exp(x.^2+y.^2)
```

Результат:

X=	Y=	Z=
-2 -1 0 1 2	0 0 0 0 0	1.0e+012 *
-2 -1 0 1 2	1 1 1 1 1	0.0000 0.0000 0 -0.0000 -0.0000
-2 -1 0 1 2	2 2 2 2 2	0.0000 0.0000 0 -0.0000 -0.0000
-2 -1 0 1 2	3 3 3 3 3	0.0000 0.0000 0 -0.0000 -0.0000
-2 -1 0 1 2	4 4 4 4 4	0.0000 0.0000 0 -0.0000 -0.0000
-2 -1 0 1 2	5 5 5 5 5	0.0010 0.0000 0 -0.0000 -0.0010
		7.8627 0.1957 0 -0.1957 -7.8627

Повторяющиеся строки в массиве X и повторяющиеся столбцы в массиве Y обеспечивают простые и эффективные вычисления значений функции Z в узлах сетки. Этот подход гарантирует и правильность

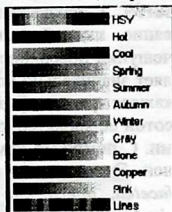
сочетания координат x и y в узлах сетки. Теперь, для создания и одновременного отображения объекта типа *surface* можно применить одну из функций — *surf* или *mesh*.

• Функция **mesh(x,y,z)** – трехмерная сетчатая поверхность.

Синтаксис:

```
mesh(X,Y,Z); mesh(Z); mesh(...,C);
mesh(...,'PropertyName',PropertyValue,...);
mesh(axes_handles,...); meshc(...); meshz(...);
h = mesh(...); h = meshc(...); h = meshz(...);
hsurface = mesh('v6'...), = meshc('v6'...), = meshz('v6'...)
```

Описание: Команда **mesh(X,Y,Z)** или **mesh(X,Y,Z,C)** создает и выводит на экран сетчатую поверхность для значений массива **Z**, определенных с помощью массивов **X,Y**. X и Y являются векторами, $\text{length}(X) = n$ и $\text{length}(Y) = m$, где $[m,n] = \text{size}(Z)$. Цвета узлов поверхности задаются массивом **C**. Команда **meshc(...)** в дополнение к трехмерным поверхностям строит проекцию линий постоянного уровня. Команда **meshc(...)** в дополнение к трехмерным поверхностям строит точку отсчета на нулевом уровне, закрывая поверхность, лежащую ниже этого уровня. Команда **h = mesh(...)** возвращает дескрипторы функции *Surface*.



Параметры *colormap*

Команда **colorbar** строит рядом с полем графика столбик с цветовой гаммой, соответствующей текущему состоянию массива *colormap*. Маркировка столбика демонстрирует привязку цвета к значениям аппликат Z .

Пример 9. Построение каркасной поверхности функции $z=x \cdot \exp(-x^2-y^2)$ (рис.4.20).

```
[x,y]=meshgrid([-2:0.25:2]);
z=x.*exp(-x.^2-y.^2);
mesh(X,Y,Z)
colormap(cool), colorbar
>> ylabel('Ось Y', 'fontname',
'arial', 'fontweight', 'bold')
>> xlabel('Ось X', 'fontname',
'arial', 'fontweight', 'bold')
>> zlabel('Ось Z', 'fontname', 'arial',
'fontweight', 'bold')
```

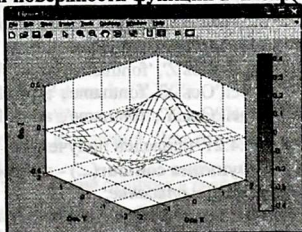


Рис.4.20

• **Функция `surf(x,y,z)` – трехмерная сплошная поверхность.**

Синтаксис:

```
surf(Z), surf(Z,C), surf(X,Y,Z),
surf(X,Y,Z,C),
surf(...,'PropertyName',PropertyV
alue),
surf(axes_handle,...), surfc(...), h =
surf(...), h = surfc(...),
hsurface = surf('v6',...), hsurface =
surfc('v6',...)
```

Описание: Функции `surf(...)`, `surfc(...)` осуществляют закрашивание каждой четырехугольной чешуйки поверхности. Это позво-

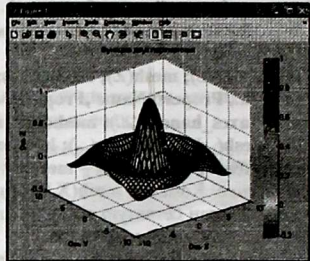


Рис.4.21

ляет значительно улучшить восприятие поверхности. По умолчанию каждая грань закрашивается одинаковым цветом в соответствии с высотой ее характерной точки, а ребра между гранями остаются черными. С помощью команды `shading` способ закраски может быть изменен. Эта команда допускает задание одного из трех режимов — *faceted*, *interp* или *flat*. По умолчанию считается установленным *shading faceted*.

Пример 10. Задание двумерная сетка и построение функции $z=\sin(R)/R$, на квадратной поверхности: $-8 \leq x \leq 8, -8 \leq y \leq 8$.

```
>> [X,Y]=meshgrid([-8:0.5:8]);
>> R=sqrt(X.^2+ Y.^2)+eps;
>> Z=sin(R)./R;
>> surf(X,Y,Z)
>> title ('Функция двух переменных','FontName', 'Arial')
>> colormap(hsv), colorbar
>> zlabel('Ось Z', 'fontname', 'arial','fontweight', 'bold')
>> xlabel('Ось X', 'fontname', 'arial','fontweight', 'bold')
>> ylabel('Ось Y', 'fontname', 'arial','fontweight', 'bold')
```

На рис.4.21. приведен полученный график.

• **Функция `contour(...)` - построение линий уровня.**

Синтаксис и описание:

`contour(Z)` - рисует двумерные линии уровня для массива данных Z , без учета диапазона изменения X, Y .

`contour(Z,n)`-рисует n линий уровня для массива данных Z , по умолчанию $n=10$.

contour(Z,v)-рисует линии уровня для заданных значений в векторе **v**.
contour(X,Y,Z) - рисует двумерные линии уровня для массива данных **Z**, с учетом диапазона изменения **X,Y**.

Пример 11. Построение линий уровня с функцией peaks (рис.4.22).

```
>> [x,y,z] = peaks;
>> contour(x,y,z,20)
>> hold on
>> pcolor(x,y,z) %палитра псевдоцвета
>> shading interp
```

Пример 12. Построение проекции изолиний поверхности с оцифровкой изолиний (рис.4.23).

```
>> [x,y]=meshgrid([-2:0.25:2]);
>> z=x.*exp(-x.^2-y.^2);
>> [C,h]=contour(x,y,z);
>> clabel(C,h) %автоматическая оцифровка изолиний.
```

Задание 1. Постройте график функции $z = \exp(x^2+y^2)$.

$-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$, шаг: 0,05;

для формирования массива $[x,y]$ используйте функцию **meshgrid()**.

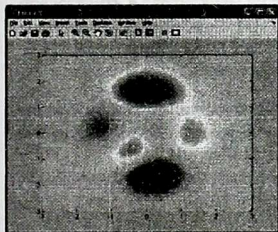


Рис. 4.22.

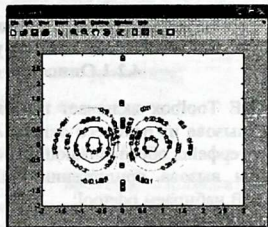


Рис. 4.23.

Задание 2. Применение функций meshc() и meshz(X,Y,Z).

- В примере 9. замените графическую функцию на **meshc(X,Y,Z)**. Все остальные команды оставьте без изменения. Чем отличается полученный график от предыдущего?
- Примените функцию **meshz(X,Y,Z)**. Какие отличия в графике?
- Замените аргумент функции **colormap()** на любой другой из списка параметров, например на: **colormap(hsv)**, **colorbar**

Контрольные вопросы:

1. Перечислите и опишите функции, используемые для создания двумерных и трехмерных графиков.
 2. В чем состоит отличие функции `plot3()` от других известных вам функций трехмерной графики?
 3. Для чего служит команда `title` ('Функция двух переменных', 'FontName', 'Arial', 'Color', 'b', 'FontWeight', 'bold') и что означает каждый параметр в скобках?
 4. Что изменится на графике, если ввести одну из следующих команд:
 `shading interp?`
 `shading faceted?`
 `shading flat?`
 5. Какие команды вводятся для подписи координатных осей?
 6. В чем назначение функции `meshgrid()`?
 7. В чем отличие графика функции `mesh(...)` от графика `meshc(...)`?
 8. Что собой представляет графическая функция `surf()`?
- Как работает функция `contour`?

4.2 Решение задач теплопроводности методом конечных элементов с помощью инструмента PDE Toolbox

4.2.1. Описание среды pdetool

PDE Toolbox включает в себя специальную функцию `pdetool`. При ее вызове из рабочего окна MATLAB разворачивается графический интерфейс, обеспечивающий решение задачи [89-90].

Для вызова приложения PDE Toolbox в командной строке MATLAB набираем `pdetool`:

```
>> pdetool.
```

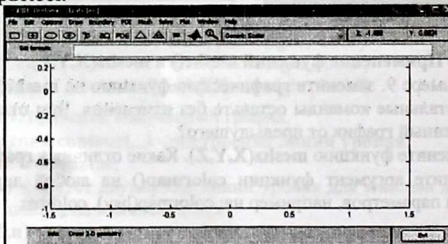
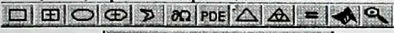




Рис. 4.24. Графический интерфейс PDE Toolbox

В верхней части расположена строка главного меню, включающие пункты File, Edit, Options и др. Под главным меню находятся инструменты , список видов задач "Application"  и указатель значений координат x и y .

Ниже расположены окно «Set formula»(ввод формулы), графическое окно для работы с расчетной областью. Графический интерфейс внизу включает в себя строку «Info» и кнопку «Exit»(выход).

Рассмотрим основные этапы решения поставленной задачи по определению температурного поля для пластины с соответствующими граничными условиями.

Система МАТЛАБ имеет приложение позволяющее решать задачи теплообмена, которые включают систему дифференциальных уравнений в частных производных определяющих поля скорости, температуры, концентрации и краевые условия. Для этого в приложение PDE Toolbox включено уравнение эллиптического типа в виде $-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$, которое в обычном виде можно представить в следующем виде: $-\text{div}(c \text{ grad } u) + au = f$.

Коэффициенты c, a, f зависят от координат и зависимой переменной u .

Можно решать также параболическое уравнение:

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$$

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(c \text{ grad } u) + au = f, \quad (4.1)$$

с коэффициентами, зависящими от времени. Применительно к задачам теплообмена: Зависимую переменную u идентифицируют с температурой, коэффициент c - с теплопроводностью тела, коэффициент f - с объемной мощностью внутренних источников теплоты.

Произведение au может представлять отвод теплоты в окружающую среду с нулевой температурой, или специальный вид внутреннего источника(стока) теплоты;

Коэффициент d для нестационарной задачи есть объемная теплоемкость ρc . Данное уравнение, записанное в стиле пакета МАТЛАБ, с уравнением теплопроводности.

На границах $d\Omega$ области ставятся граничные условия(условия Дирихле):

$$hu = r$$

Например, задается распределение температуры вдоль границы или обобщенное условие Неймана:

$$n \cdot (c \operatorname{grad} u) + qu = g, \quad (4.2)$$

где n – внешняя нормаль к поверхности тела.

Последнее условие в случае $g=0$ и $q \neq 0$ описывает теплоотдачу с окружающей средой при нулевой температуре (условие 3 рода, q – коэффициент теплоотдачи, согласно обозначениям МАТЛАБ). Если $q=0$, $g \neq 0$, то задается плотность теплового потока на поверхности (условие 2 рода).

В общем случае соответствующим подбором коэффициентов (q , g) как функций координат и температуры на поверхности могут быть описаны разнообразные сложные условия теплового взаимодействия с окружающей средой.

Здесь приняты следующие обозначения переменных (полей): ρ_0 – плотность вещества; C – удельная теплоёмкость вещества C ; k – теплопроводность вещества k ; Q – объёмная плотность мощности сторонних источников тепла Q . В поле "Equation" этого окна показан вид уравнения теплопроводности. Второе слагаемое правой части уравнения в этом окне записано некорректно. " $h \cdot (\text{Text}-T)$ " – это не объёмно распределённый источник тепла, а составляющая плотности потока тепловой мощности через внешнюю границу расчётной области, пропорциональная разности температур окружающей среды и границы расчётной области. На самом деле это слагаемое относится к граничным условиям, которые в задачах электромагнетизма называются "импедансными". Здесь h – коэффициент конвективного или кондуктивного теплообмена расчётной области с окружающей средой, Вт $\text{м}^{-2} \text{K}^{-1}$; Text – температура окружающей среды при бесконечном удалении от расчётной области (здесь предполагается, что расчётная область окружена бесконечной однородной средой без источников тепла); T – температура границы расчётной области. По умолчанию $\rho_0=1$, $C=1$, $k=1$, $Q=1$, $h=1$, $\text{Text}=0$. В режиме "Elliptic" ввод коэффициентов ρ_0 и C запрещён.

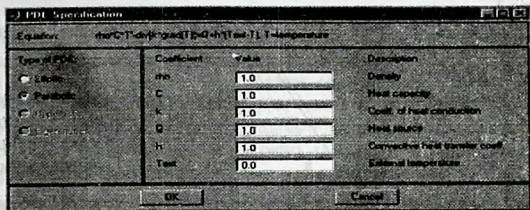


Рис. 4.25. Диалоговое окно ввода коэффициентов PDE теплопроводности

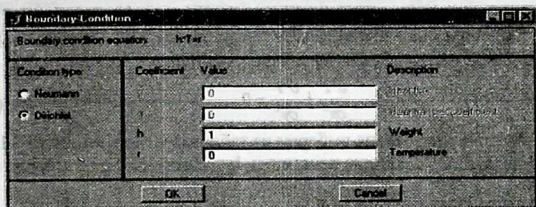


Рис. 4.26. Диалоговое окно ввода граничных условий Дирихле

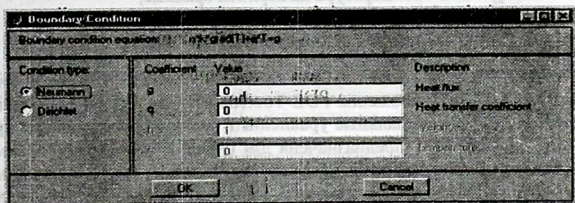


Рис. 4.27. Диалоговое окно ввода граничных условий Неймана

На рис.4.25- 4.27 показан вид диалоговых окон ввода граничных условий для краевой задачи теплопроводности и значения соответствующих параметров по умолчанию. Как видно, ввод граничных условий осуществляется так же, как и в случае "Generic Scalar". Отличие заключается только в обозначении искомой переменной (там u , а здесь T). Краевая задача анализа теплового поля названа в PDETool "Heat Transfer".

Задача 1.

Найти распределение $T(x,y)$ в тонкой пластине прямоугольной формы с размерами a и b (Рис.4.28).

Граничные условия:

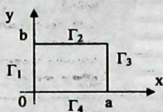


Рис. 4.28.

$T(x_1, y, t) = g_1(y)$ - левая граница
 $T(x_n, y, t) = g_2(y)$ - правая граница
 $T(x, y_1, t) = g_3(x)$ - нижняя граница
 $T(x, y_m, t) = g_4(x)$ - верхняя граница

Решение:

Распределение температуры $T(x,y)$ на тонкой пластине прямоугольной формы описывается уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (4.3)$$

Граничные условия выберем из таблицы 4.1 для варианта - 1-1: $a = 24 \text{ мм} = 0,024 \text{ м}$ - длина пластины; $b = 10 \text{ мм} = 0,01 \text{ м}$ - ширина пластины;

$T(\Gamma_1) = 20^\circ\text{C}$ - температура на левой границе;

$T(\Gamma_2) = 0^\circ\text{C}$ - температура на верхней границе;

$T(\Gamma_3) = 100^\circ\text{C}$ - температура на правой границе;

$T(\Gamma_4) = 0^\circ\text{C}$ - температура на нижней границе.

Для решения воспользуемся приложением PDE Toolbox в системе МАТЛАБ. Приложение PDE Toolbox (от англ. Partial Differential Equation - дифференциальные уравнения в частных производных) при пакете MatLab 7.0.1 предназначена для решения дифференциальных уравнений в частных производных при помощи метода конечных элементов в двумерной постановке. Приложение PDE Toolbox включает графический интерфейс, инструменты для задания формы уравнений и граничных условий, процедуры автоматической генерации сетки конечных элементов, средства для визуализации полученного решения и его анимации.

В пункте меню на панели инструментов **Options, Application** выбирают область инженерных наук, **Heat Transfer** (теплообмен). В пункте меню **Options, Axis limits ...** выбирают размеры двумерной рабочей области, в которой будут производиться геометрические построения для оси x - $[-0.05 \ 0.05]$ и для оси y - $[-0.05 \ 0.05]$.

Для построения рабочей области в меню Draw или на панели инструментов можно выбрать формы фигур, в нашем случае прямоугольник и правой кнопкой мыши строят прямоугольник с шириной 0.01 м и высотой 0.024м. Эта область автоматически затемняется и снабжается меткой R1(Рис.4.29). Для того, чтобы установить нужную точность размеров объекта, необходимо два раза щелкнуть на прямоугольнике и открыть диалоговое окно, где можно установить точные координаты и размеры.

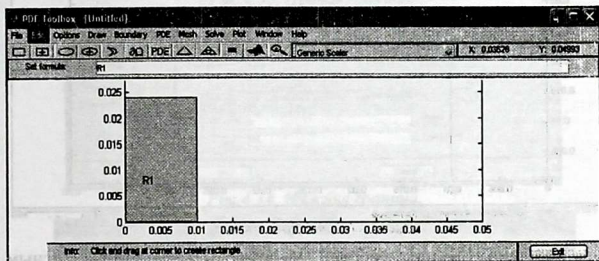


Рис.4.29.Рабочая область

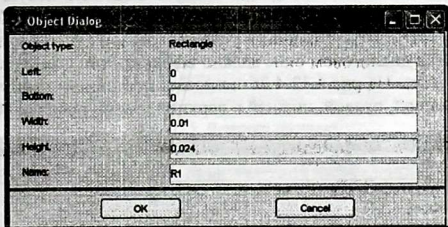


Рис.4.30.Диалоговое окно для уточнения геометрических размеров области.

Для задания граничных условий необходимо активизировать кнопку с символом $\partial\Omega$, в результате чего окно приложения примет вид, как на рис.4.31.

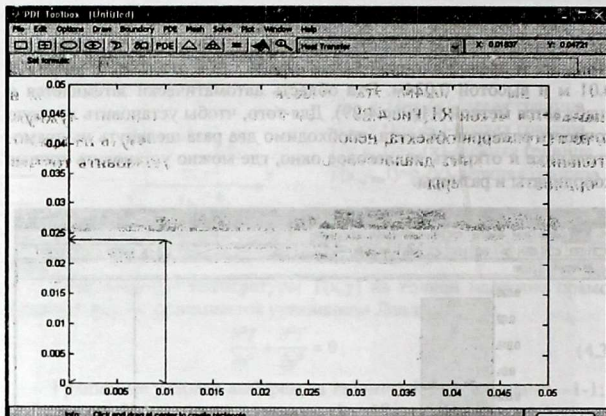


Рис.4.31. Контуры грани.

Внешние границы рабочей области высвечиваются красным цветом. Двойным щелчком мыши следует выделить левую границу области, при этом появляется диалоговое окно **Boundary Condition**, где можно установить граничные условия согласно условию задачи. В открывшемся диалоговом окне можно выбирать тип граничного условия – **Dirichlet**. На рис.4.32-4.36 показаны постановка граничных условий для левой, правой, нижней и верхней границ рабочей области.

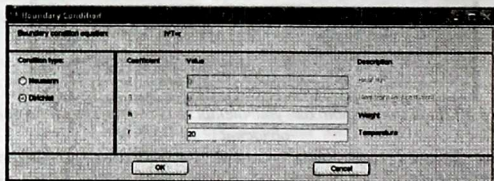


Рис.4.32. Левая граница.

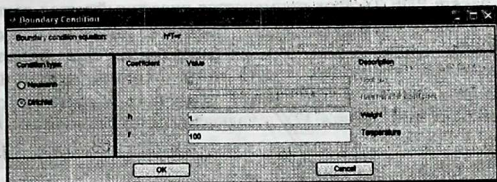


Рис. 4.33. Правая граница.

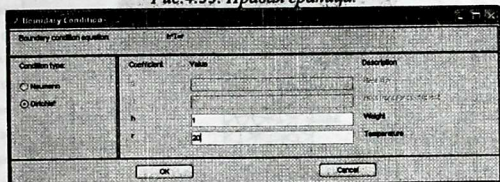


Рис. 4.34. Нижняя граница.

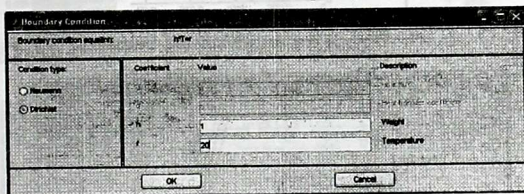


Рис. 4.35. Верхняя граница.

После определения граничных условий необходимо перейти в режим PDE. в открывшемся окне для типа дифференциального уравнения Elliptic указывают коэффициенты k, Q, H и Text.

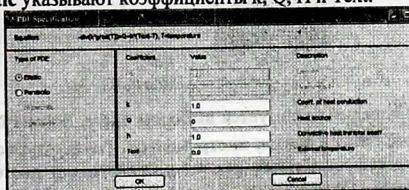



Рис. 4.36. Спецификация коэффициентов уравнения.

В пакете PDE Toolbox применяется численный метод конечных элементов, который предусматривает разбиение расчетной области на треугольники конечных размеров. Значения температуры представляются значениями в вершинах треугольников. При выборе на панели инструментов кнопки Δ размечается первичная, достаточно грубая сетка (**Initialise Mesh**) (Рис.4.37), в дальнейшем, после выбора кнопки  число узлов становится на порядок больше (**Refine Mesh**) (Рис.4.38).

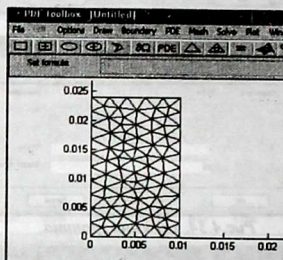


Рис.4.37. Грубая сетка(Initialise Mesh)

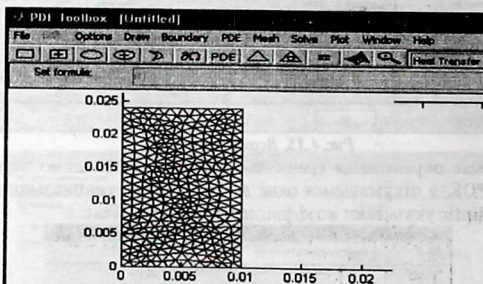



Рис.4.38. Более точная сетка(Refine Mesh).

Запуск решения реализуется выбором **Solve**, **Solve PDE** или нажатием кнопки  на панели инструментов. Температурное поле тепла как результат численного решения представлен цветом (**Color**, цветовая шкала представлена справа) и изотермами (**Contour**) (Рис.4.15).

В режиме **Plot, Parameters** представляются дополнительные способы визуализации результатов (Рис.4.16). Пространственный график распределения температуры получается при включении позиции **Height(3-D plot), temperature** (Рис.4.17-4.18).

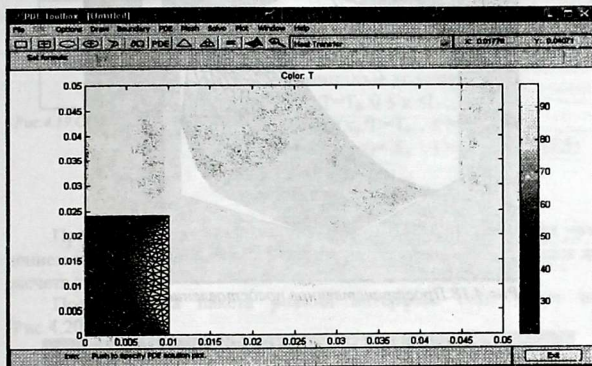


Рис.4.16. Результат решения.

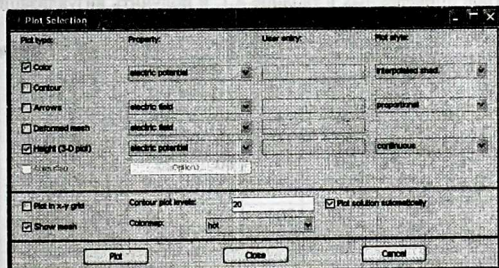


Рис.4.17. Окно для дополнительных способов визуализации.

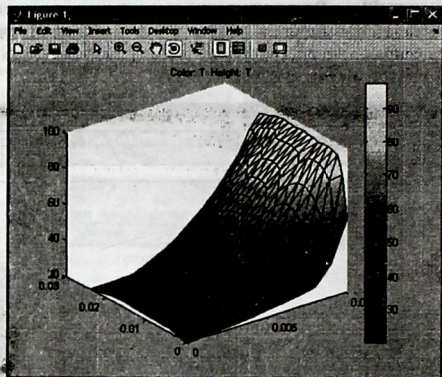


Рис.4.18.Пространственное представление решения.

Задания для самостоятельной работы

Провести расчет температурного поля плоской пластины для параметров приведенных в таблице 4.1. и получить визуализацию результатов решения.

Таблица 4.1.

Параметр	Вариант					
	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
a, мм	24	25	60	30	25	24
b, мм	10	15	48	20	15	10
$T(\Gamma_1), ^\circ\text{C}$	20	30	80	25	35	75
$T(\Gamma_2), ^\circ\text{C}$	0	5	10	15	10	20
$T(\Gamma_3), ^\circ\text{C}$	100	200	150	100	300	400
$T(\Gamma_4), ^\circ\text{C}$	0	25	10	15	80	100

Задача №2

Решить одномерную задачу теплопроводности для плоской бесконечной пластины или изолированного стержня Рис.4.19. На одной границе пластины поддерживается постоянная температура T_m на другой границе – температура T_n . Начальная температура равна T_0 , источники тепловыделения внутри пластины отсутствуют.

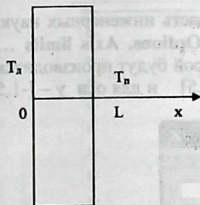


Рис.4.19. Схема расчетной области

Уравнение теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}[k \cdot \text{grad}(T)] = Q \quad (4.4)$$

где ρ и c плотность и теплоемкость вещества, T – температура, k – коэффициент теплопроводности, Q – плотность источников тепла.

Граничные условия

$$t=0: T=T_0, 0 \leq x \leq L;$$

$$x=0: T(x_0,0)=T_n, t > 0;$$

$$x=L: T(L,t)=T_n, t > 0. \quad (4.5)$$

Решение

Процесс передачи тепла в твердом веществе описывается уравнением теплопроводности(4.4). В таблице 4.1. приведены данные для расчета задачи.

После вызова пакета `pdetool` интерфейс окна имеет вид (Рис.4.20.):

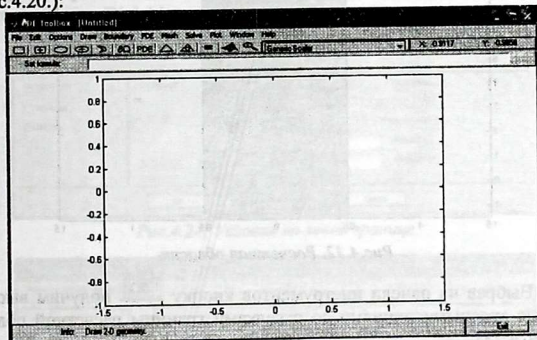


Рис.4.20.Интерфейс пакета `pdetool`.

Проведем расчет распределения температуры для стали: коэффициент теплопроводности $K=46 \text{ Вт}/(\text{м}^0\text{С})$, плотность $\rho=7800 \text{ кг}/\text{м}^3$, $C=460 \text{ Д}/(\text{кг}^0\text{С})$, $L=0.1 \text{ м}$, $T_0=20^0\text{С}$, $T_n=300^0\text{С}$, $T_n=100^0\text{С}$.

Выбрав кнопку правой кнопкой мыши отметим необходимую рабочую область, предварительно в пункте меню на панели ин-

струментов **Options, Application** выберем область инженерных наук, **Heat Transfer**(теплообмен). В пункте меню **Options, Axis limits ...** уточняются размеры рабочей области, в которой будут производиться геометрические построения для оси x $[-1.5 \ 1.5]$ и для оси y $[-1.5 \ 10]$.

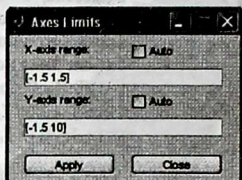


Рис.4.21. Указание пределов рабочей области.

В результате сформируем расчетную область в виде (Рис.4.22.).

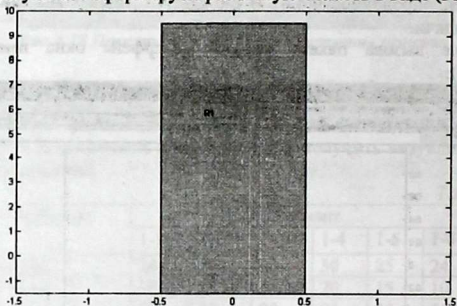



Рис.4.22. Расчетная область

Выбрав на панели инструментов кнопку  получим высвеченные красными линиями со стрелками границы расчетной области(Рис.4.23).

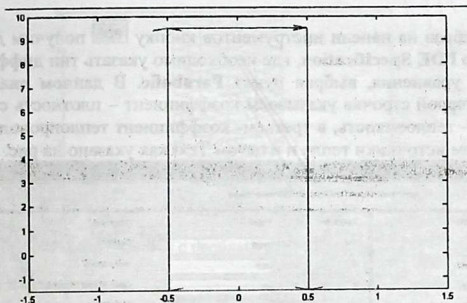


Рис.4.23. Граничные условия

Отметив двойным щелчком мыши на левую границу, в появившемся диалоговом окне **Boundary Condition**, можно установить граничные условия сонна левой и правой границах области (Рис.4.24-4.25). В открывшемся диалоговом окне можно выбирают тип граничного условия – **Dirichlet**.

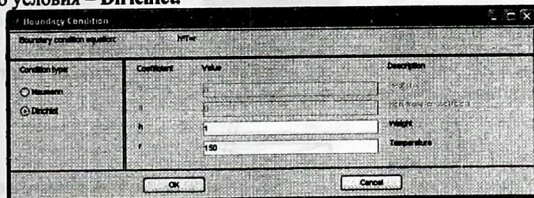


Рис.4.24. Условия на левой границе

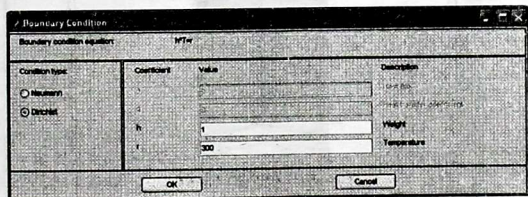

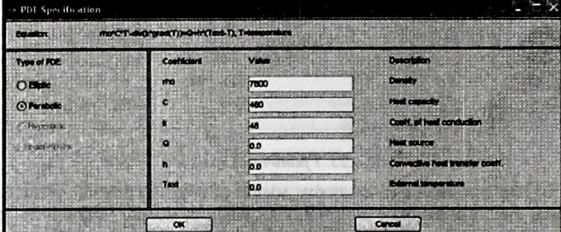




Рис.4.25. Условия на правой границе

Выбрав на панели инструментов кнопку  получим диалоговое окно **PDE Specification**, где необходимо указать тип дифференциального уравнения, выбрав пункт **Parabolic**. В данном диалоговом окне в первой строчке указываем коэффициент – плотность стали, во втором – теплоемкость, в третьем- коэффициент теплопроводности, в четвертом источнике тепла и в пятом Text как указано на рис. 4.26.



Type of PDE	Coefficient	Value	Description
<input type="radio"/> Elliptic	rho	7800	Density
<input checked="" type="radio"/> Parabolic	c	480	Heat capacity
<input type="radio"/> Hyperbolic	k	48	Coeff. of heat conduction
<input type="radio"/> Heat transfer	q	0.0	Heat source
	h	0.0	Convective heat transfer coeff.
	Text	0.0	External temperature

Рис.4.26. Спецификация коэффициентов уравнения теплопроводности

Выбрав на панели инструментов последовательно кнопку  один раз, кнопку  два раза получим соответственно грубую сетку(Рис.4.27), сетку с двойным количеством узлов(Рис.4.28) и сетку с количеством узлов увеличенным в 4 раза(Рис.4.29).

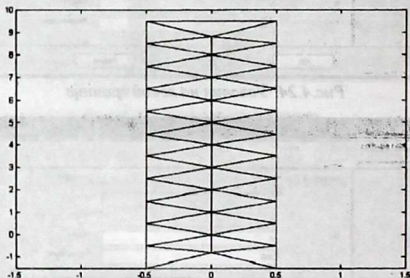


Рис.4.27.Грубая сетка

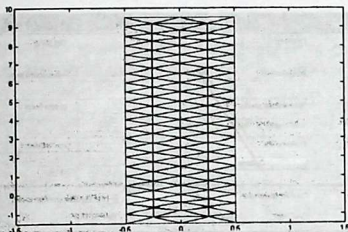


Рис.2.28. Сетка с двойным количеством узлов.

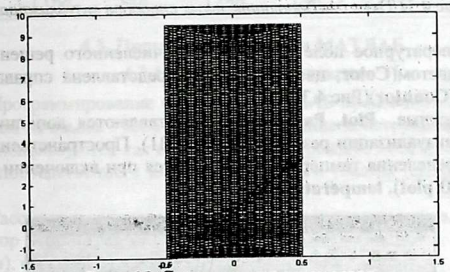



Рис.4.29. Сетка с увеличением узлов.

Для получения решения задачи выберем кнопку . Результаты расчетов показаны на рис.4.30.

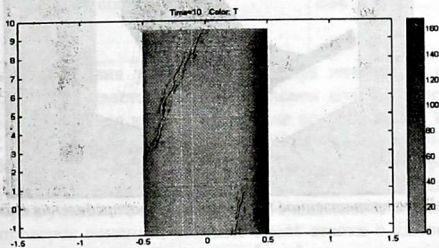


Рис.4.30. Результаты расчетов распределения температуры.

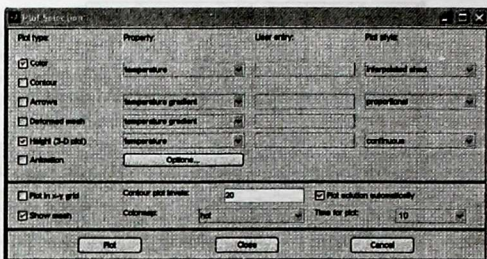


Рис.4.31 Окно для дополнительных способов визуализации.

Температурное поле как результат численного решения представлено цветом (Color, цветовая шкала представлена справа) и изотермами (Contour) (Рис.4.30).

В режиме Plot, Parameters представляются дополнительные способы визуализации результатов (Рис.4.31). Пространственный график распределения температуры получается при включении позиции Height (3-D plot), temperature (Рис.4.32).

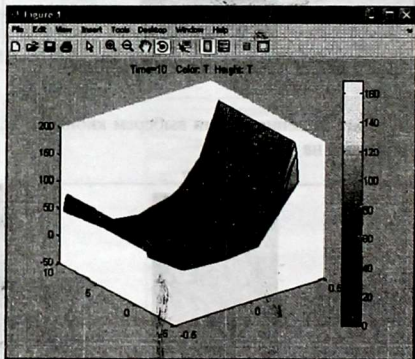


Рис.4.32. Пространственное представление распределения температуры.

Задание для самостоятельного выполнения

Получить пространственное распределение температурных полей для указанных в таблице параметром расчетных областей.

Таблица 4.2

Параметр	Вариант					
	1.1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
ρ , кг/м ²	$2,8 \cdot 10^3$	$3,5 \cdot 10^3$	$3,5 \cdot 10^3$	$2,9 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$3,5 \cdot 10^3$
C , Дж/кг·К	880	140	250	300	330	440
K , Вт/м·К	75	210	100	80	150	180
T_0 , °С	0	150	20	210	35	140
T_L , °С	100	10	120	70	65	5

4.3. Программирование в МАТЛАБ

4.3.1. Операторы М-языка

Программирование в системе МАТЛАБ производится с использованием М-языка. Рассмотрим управляющие конструкции языка, которые используются как в интерактивном режиме введением операторов непосредственно с клавиатуры, так и в текстах программ на М-языке.

Рассмотрим операторы ветвления и операторы цикла. Условный оператор использует ключевые слова if(если), else(иначе), elseif (иначе если), end(конец) и реализуется в нескольких вариантах:

if условие	if условие	if условие1
...
end	else	elseif условие 2

	end	else
		...
		end

Область действия условного оператора начинается ключевым словом if, и заканчивается ключевым словом end. Если условие истинно, то выполняются команды, стоящие после строки с ключевым словом if. Если условие ложно, то эти команды пропускаются и переходят либо к следующему за условием оператору (первая форма), либо проверяют еще одно условие в строке с ключевым словом elseif (третья форма условного оператора), либо выполняются без дополнительных проверок команды, стоящие после строки с ключевым словом else(вторая из приведенных выше форм).

Различают два вида операторов цикла – цикл с предусловием и с известным числом повторений.

Формат цикла с предусловием имеет следующий вид:

while условие

...

end

Повторение выполнения набора команд, обозначенного многоточием, продолжается до тех пор пока условие «истинно». Для массивов истинность наступает, когда все элементы массива истинны. Рассмотрим в качестве примера нахождение суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$:

>>S=0;k=1;u=1;

>>while u>1e-8

S=S+u;

k=k+1;

u=1/k;

end;

В этом фрагменте условием прекращения является требование к слагаемому быть больше заранее определенного числа (в данном случае 10^{-8}) – как только очередное слагаемое станет меньше этого числа, условие стоящее после ключевого слова while, становится ложным и суммирование прекращается.

Оператор цикла можно организовать с использованием ключевых слов for и end:

for имя переменной=выражение

...

end

где имя переменной – выбирается произвольно и является счетчиком цикла, который задает число возможных повторений. Приведем пример кода для сложения первых 15 членов ряда: $\sum_{k=1}^{15} k^3$:

>>S=0;

>>for k=1:1:15;

S=S+1/k³;

end;

В МАТЛАБ вместо операторов цикла применяют команды М-языка, предназначенные для обработки массивов. Например, вместо фрагмента кода с оператором цикла

>> k=0;

>>for x=0:0.1:100

```
k=k+1;  
y(k)=cos(x);  
end;
```

лучше использовать операции с массивами:

```
>> x=0:0.1:100;  
>> y=cos(x);
```

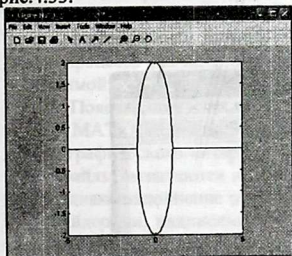
Такую замену операторов цикла эквивалентными им по результату функциями М-языка принято называть векторизацией кода.

Получим анимационный эффект для визуализации результатов вычислений. Для этого проводится предварительная подготовка отдельных кадров, которые сохраняются для дальнейшего показа в некотором числовом массиве. Затем функцией `movie` осуществляется последовательный покадровый показ созданного анимационного клипа. В графическом окне продемонстрируем равномерное движение по эллипсу тела в виде точки. Сначала выполняем последовательность команд:

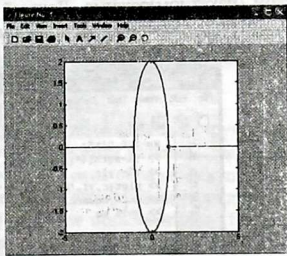
```
>> x=-5:0.01:5;  
>> y1=sqrt(4*(1-x.*x));  
>> y2=-y1;  
>> plot(x,y1,'k',x,y2,'k');  
>> axis square;  
>> hold on
```

Здесь команда `hold on` необходима для последующего графического вывода изображений в одно и тоже графическое окно.

После этого поместим точку в ее начальное положение как на рис.4.33.



а)



б)

Рис.4.33.Траектория движения (а-траектория движения по эллиптической траектории, б- положение точки в момент времени $t=0$)

```
>> x=1; y=0;
>> h=plot(x, y, 'r');
>> set(h,'EraseMode','xor','MarkerSize',18);
```

В дальнейшем, динамически изменяем координаты точки, относясь к графическому объекту типа `line` с описателем `h`. При этом МАТЛАБ будет стирать предыдущие изображения этого графического объекта и рисовать его новые изображения. Для осуществления циклического продвижения точки и ее перерисовку:

```
>> t=0;
>> dt=0.1;
>> a=2*pi/200;
>> for k=1:1000
t=t+dt;
x=cos(a*t);
y=2*sin(a*t);
set(h,'Xdata',x,'Ydata',y); { перемещаем точку в новое положение}
Buff(k)=getframe; {сохранение созданного кадра видеоклипа}
end;
```

Для воспроизведения созданного видеоклипа используется команда `movie`:

```
>> movie(Buff,1)
```

Повторный ввод больших фрагментов кода на М-языке утомителен и приводит к ошибкам. Чтобы избежать повторного набора кода большого размера используется инструмент, который называется сценарием работы. Под сценарием понимают текстовый файл, содержащий инструкции на М-языке, подлежащие исполнению в автоматическом (пакетном) режиме. Данный файл может иметь произвольное имя, но фиксированное расширение состоящий из одной буквы `m` и называется М-файлом.

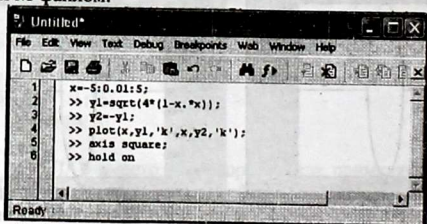


Рис. 4.34. Рабочее окно текстового редактора МАТЛАБ.

Для создания М-файла вызывается редактор из командного окна МАТЛАБ командой File/New/m-file/. Редактор работает в своем собственном окне(рис.). Переменные, определяемые в командном окне, и переменные, определяемые в сценариях, составляют единое рабочее пространство МАТЛАБ.

4.4. Технология разработки графического интерфейса пользователя в системе MATLAB 7

4.4.1. Основные команды для создания GUI

В настоящее время одним из непреложных атрибутов любой прикладной программы является интерактивный интерфейс пользователя (Graphics User Interface - GUI), который разрабатывается для неоднократно решаемых задач с несколькими входными параметрами[91-94]. Наличие интерфейса, во-первых, освобождает пользователя от необходимости вникать в детали программирования, во-вторых, позволяет менять исходные данные, не прекращая выполнения текущей программы, и в реальном времени наблюдать за изменениями решения задачи. Сегодня выработаны достаточно общие требования, которым должны соответствовать программные интерфейсы, определены основные элементы управления графическим интерфейсом. Например, если речь идет о решении учебной и/или научной задачи обязательными элементами интерфейса должны быть:

1. Одно или несколько окон для визуализации результатов расчетов.
2. Редактируемые окна, позволяющие задавать значения входных параметров задачи.
3. Управляющие кнопки, предназначенные для запуска и остановки процесса расчета, вывода результатов, завершения работы с программой.
4. Поясняющие надписи(статический текст)

В МАТЛАБ дескрипторная графика позволяет конструировать детали графического интерфейса(GUI). При этом различные функции и m – файлы вызываются из графического окна общего стандартного вида. Однако наполнение окна элементами интерфейса(кнопками, меню, слайдерами, надписями и т.д.) задается пользователем. Полный список команд и функций для проектирования пользовательского интерфейса из командной строки можно получить, выполнив команду helpuitools.

Рассмотрим программу (распечатка m-файла с именем ui), которая при запуске создает 4 объекта интерфейса(рис.4.35):

```

1 function ui
2 k1=uiscontrol('Style','pushbutton',...
3 'Units','normalized','Position',[.7 .5 .2 .1],...
4 'String','click here');
5 k2=uiscontrol('Style','pushbutton',...
6 'Units','normalized','Position',[.6 .3 .2 .1],...
7 'String','click here');
8 ck=uiscontrol('Style','pushbutton','String','Clear',...
9 'Position',[150 150 100 70], 'Callback','cl');
10 hpop = uicontrol('Style','popup',...
11 'String','horizontal|cool|gray',...
12 'Position',[39 320 100 50],...
13 'Callback','setamp');
14

```

Рис.4.35. Листинг программы программирования объектов.

Первые два объекта k1 и k2 – это малые кнопки с надписью click here («щелкни здесь»). Объект ck – это большая кнопка Clear (кстати, действующая). Объект hpop – выпадающий список (тоже действующий, хотя и содержащий поименованные позиции -пустышки). Для создания всех этих объектов используется команда uicontrol с соответствующими параметрами, задающими стиль (вид) объекта интерфейса, место его размещения и надпись (на кнопках). На рис.4.36. построены все эти объекты, причем список показан в открытом состоянии.

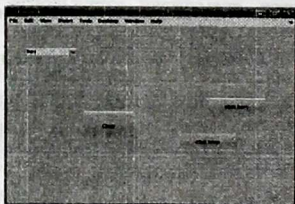


Рис.4.36. Графические окна с элементами окон.

Дескрипторная графика MATLAB позволяет создавать любые детали современного пользовательского интерфейса.

В последней версии системы MATLAB имеются специальные инструментальные средства для визуально-ориентированного программирования и проектирования приложений с GUI. Состав этих средств следующий:

- GUIDE- конструктор графического интерфейса;
- Property Inspector – инспектор свойств;
- Object Browser –браузер объекта;
- M-file Editor – редактор M-файлов;
- Component Callbacks – средство создания функций обработки событий для компонентов;
- Figure Callbacks – средства создания функций для обработки событий окон;
- Align Objects – средства выравнивания положения объектов;
- Grid and Rules – средства управления выводом сетки и линейками просмотра;
- Menu Editor – редактор меню;
- The Order Editor - средство изменения порядка активации компонентов при нажатии клавиши Tab.

Эти средства дают достаточный набор средств для визуально-ориентированного программирования и проектирования GUI. Такой подход характерен для ряда современных визуально-ориентированных языков программирования и существенно облегчает создание приложений с GUI. Это обусловлено тем, что в данном случае генерация программного кода происходит автоматически, что минимизирует усилия пользователя по программированию.

Главным средством и визуально-ориентированном проектировании GUI является приложение GUIDE(GUI Designer). При работе с инструментом GUIDE можно создавать окна GUI путем выбора мышью нужных элементов управления и перемещения их в окно GUI. Таким образом, могут создаваться различные элементы интерфейса, например кнопки, раскрывающиеся списки, линейки прокрутки и т.д. При этом возможно программирование событий, которые возникают при обращении пользователя к заданным элементам управления. Визуальное программирование совмещается с объектно-ориентированным, в частности в первом широко используется свойство наследования признаков родительских объектов их потомками.

Приложение с GUI может состоять из одного окна(основного) или нескольких окон и осуществлять вывод графической и текстовой информации как в основное окно приложения, так и в отдельные окна. MATLAB имеет ряд функций создания стандартных диалоговых окон для открытия и сохранения файлов, печати, выбора шрифта для текстовых объектов, создания окон для ввода данных и др. Эти средства(объекты) можно использовать в приложениях пользователя.

Для открытия окна инструмента GUIDE надо использовать команду

```
>> guide
```

При этом инструмент запускается и появляется диалоговое окно GUIDE (рис. 4.37):

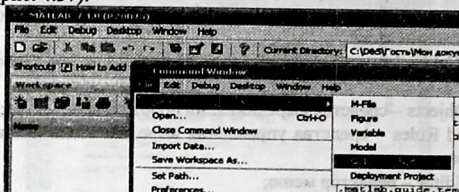


Рис.4.37. Запуск окна GUIDE.

По истечению некоторого времени, на экране появиться окно, представленное на рис.4.38-4.39.

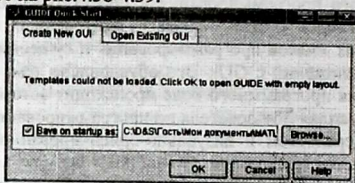


Рис.4.38.

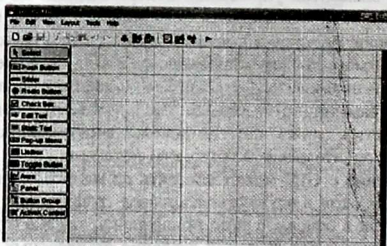





Рис.4.39. Окно нового приложения GUI.

По окончании инициализации появляется основное окно среды GUIDE, содержащее поле окна приложения, вертикальную панель ин-

струментов для добавления элементов интерфейса, горизонтальную панель инструментов и обычное меню (Рис.4.39). С назначением кнопок панелей можно ознакомиться по подсказкам, которые появляются, если установить курсор мыши на нужную кнопку панели и задержать его на несколько секунд.

Для размещения на панели формы окна, в котором будут выводиться графики используется кнопка  Щелкнув по данному элементу на панели управления и переводя мышшь на панель формы, необходимо поместить указатель мыши, имеющий форму креста, в ту точку, где будет находиться левый верхний угол окна. Нажав и удерживая левую кнопку мыши, необходимо вытянуть получающийся прямоугольник до нужных размеров. При необходимости размещения нескольких окон на панели формы повторяется описанная выше последовательность действий.

Надписи на панели формы создаются с помощью кнопки , которая переносится повторением описанной выше последовательности действий. После этого на панели формы появится надпись Static Text. Для изменения надписи необходимо выбрать надпись, щелкнув по ней левой кнопкой мыши, открыть окно Property Inspector, и ввести новый текст надписи в поле String. Для изменения цвета фона, на котором выводится надпись, следует установить новые значения поля BackgroundColor.

Для создания редактируемых окон ввода используется кнопка , которая переносится повторением вышеописанной последовательности действий. Для изменения значения окна установить в окне Property Inspector новое значение в поле String. Каждый объект (компонент) GUI имеет ряд свойств.

Создание нового окна с GUI сводится к переносу объектов из панели объектов в окно GUI будущего окна с приложением пользователя. Для этого достаточно выбрать нужные объекты и с помощью мыши перенести их в поле окна с приложением пользователя.

4.4.2. Разработка интерфейса пользователя для решения задачи теплопроводности стержня

Постановка задачи. Необходимо разработать программу для расчета нестационарного одномерного температурного поля в стержне длиной $L(0 \leq x \leq L)$. Начальная температура в стержне задается произвольной функцией $f(x)$. Температуры концов стержня: $T(0, t) = T_0$, $T(L, t) = T_k$.

При такой постановке задачи уравнение теплопроводности записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad a = \frac{\lambda}{c \rho}, \quad 0 < x \leq L, \quad 0 < t < \tau \quad (4.6)$$

Чтобы перейти от математической модели поставленной задачи к реализации вычислительного алгоритма с помощью вычислительной машины используется один из наиболее распространенных численных методов - метод конечных разностей [90]. Непрерывная область $\Omega = \{0 \leq x \leq L\} \times \{0 \leq t \leq \tau\}$ заменяется дискретной областью $\Omega_{\Delta} = \{x_1, \dots, x_N\} \times \{t_0, \dots, t_M\}$ с постоянными шагами по времени Δt и h по пространственной координате. На выбранной сетке производится аппроксимация дифференциального уравнения теплопроводности и граничных условий по явной двухслойной разностной схеме [89]. Таким образом, дифференциальное уравнение заменяется системой алгебраических уравнений, методы решения которых хорошо известны. Конструирование вычислительного алгоритма завершается определением входных и вычисляемых выходных параметров программы, которые следует объявить в качестве переменных и задать их типы данных. Затем, можно приступить к реализации этого алгоритма на компьютере с помощью среды программирования MATLAB.

В создаваемом проекте необходимо заранее построить внешний вид окна для ввода данных для решения одномерной задачи теплопроводности, т.е. удобный интерфейс программы, который позволит ввести начальные данные (*конечное время, число узлов, длина стержня, коэффициент теплопроводности, плотность, коэффициент теплоемкости материала стержня, начальные и граничные условия*) в намеченных окнах. Каждое окно должно поясняться соответствующим текстом. Необходимо предусмотреть в проекте программы управляющие кнопки: *Вычислить* – для расчета температурного поля, *Очистить окно* – для очистки результатов расчета и запуска программы с новыми начальными данными, *Выход* – для завершения и выхода из программы. Один из вариантов окна интерфейса программы показан на рис.4.40.

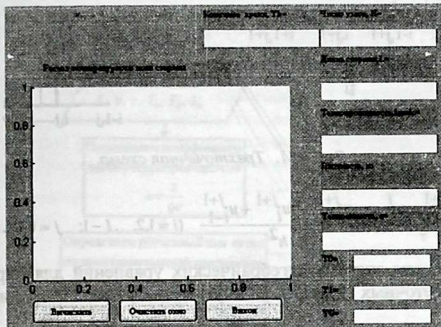


Рис. 4.40. Проект окна для ввода данных в программе решения одномерной задачи теплопроводности.

Алгоритм решения задачи. Разностная схема для решения уравнения теплопроводности при заданных начальных и граничных условиях имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t > 0, \quad a > 0 \\ U(x, 0) &= \varphi(x) \quad U(0, t) = \psi_1(t) \quad U(1, t) = \psi_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$\varphi(x)$ - начальное распределение температуры U при $t = 0$.

$\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ - распределение температуры на концах рассматриваемого отрезка $[0, 1]$ в любой момент, начальные и граничные условия должны быть согласованы, то есть $U(0, 0) = \varphi(0) = \psi_1(0)$ $U(1, 0) = \varphi(1) = \psi_2(0)$.

Вводим прямоугольную сетку:

$x_i = ih \quad (i = 0, 1, \dots, I) \quad t_j = j\tau \quad (j = 0, 1, \dots, J)$, где h, τ - шаги. $U_i^j = U(x_i, t_j)$ - значение функции в узлах сетки. Таким образом,

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \quad (i = 1, 2, \dots, I-1; \quad j = 0, 1, \dots) \quad (4.8)$$

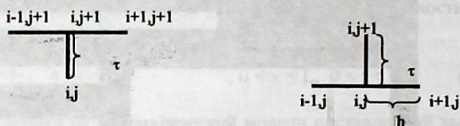


Рис.4.41. Трехточечная схема.

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} \quad (i = 1, 2, \dots, I-1; \quad j = 0, 1, \dots) \quad (4.9)$$

Получаем систему алгебраических уравнений для определения значений сеточных функции во внутренних узлах. Из граничного условия

$$u_0^j = \psi_1(t_j) \quad u_I^j = \psi_2(t_j) \quad (4.10)$$

При $t = const$ совокупность узлов называется слоем. Из (4.10) находим последовательно значения u_i^{j+1} ($i = 1, 2, \dots, I-1$) на $j+1$ слое через соответствующие значения u_i^j на j -том слое. Такие схемы называются явными. Для начала счета при $j = 1$ необходимо решение на начальном слое, которое определяется начальным условием, имеющим следующий вид:

$$u_i^0 = \varphi(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, I-1 \quad (4.11)$$

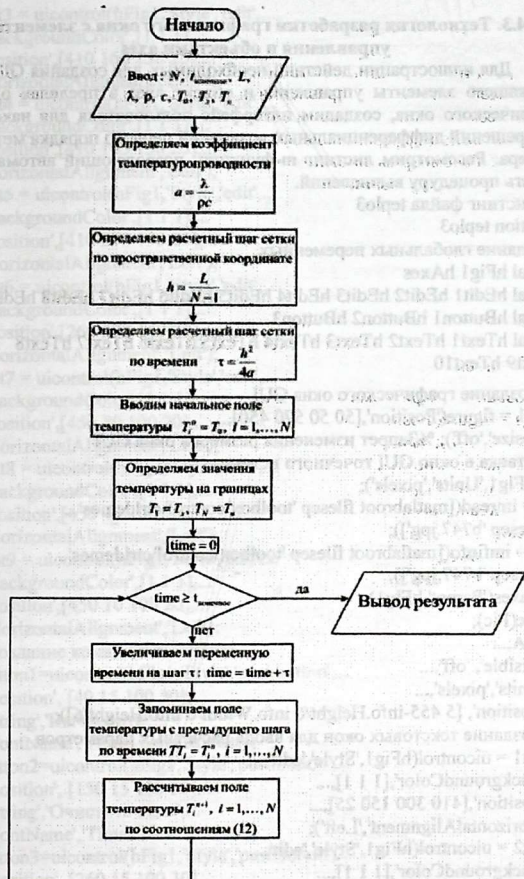


Рис. 4.42. Блок-схема рассматриваемой задачи (явная схема)

4.4.3. Технология разработки графического окна с элементами управления и объектами axes

Для иллюстрации действий необходимых для создания GUI, содержащего элементы управления и объект axes в пределах одного графического окна, создадим интерфейс пользователя для нахождения решений дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера. Рассмотрим листинг m-функции, позволяющий автоматизировать процедуру вычислений.

% Листинг файла teplo3

```
function teplo3
```

```
%Задание глобальных переменных
```

```
global hFig1 hAxes
```

```
global hEdit1 hEdit2 hEdit3 hEdit4 hEdit5 hEdit6 hEdit7 hEdit8 hEdit9
```

```
global hButton1 hButton2 hButton3
```

```
global hText1 hText2 hText3 hText4 hText5 hText6 hText7 hText8
```

```
hText9 hText10
```

```
% Создание графического окна GUI
```

```
hFig1 = figure('Position',[50 50 570 450],...
```

```
'Resize','off'); %Запрет изменения размеров окна GUI
```

```
%Вставка в окно GUI точечного источника
```

```
set(hFig1,'Units','pixels');
```

```
Pic = imread([matlabroot filesep 'toolbox\control\ctrldemos'...
```

```
filesep 'b747.jpg']);
```

```
info = imfinfo([matlabroot filesep 'toolbox\control\ctrldemos'...
```

```
filesep 'b747.jpg']);
```

```
hA=axes('Parent',hFig1);
```

```
image(Pic);
```

```
set(hA,...
```

```
'Visible','off',...
```

```
'Units','pixels',...
```

```
'Position',[5 455-info.Height/6 info.Width/6 info.Height/6]);
```

```
% Создание текстовых окон для ввода расчетных параметров
```

```
hEdit1 = uicontrol(hFig1,'Style','edit',...
```

```
'BackgroundColor',[1 1 1],...
```

```
'Position',[410 300 150 25],...
```

```
'HorizontalAlignment','Left');
```

```
hEdit2 = uicontrol(hFig1,'Style','edit',...
```

```
'BackgroundColor',[1 1 1],...
```

```
'Position',[410 230 150 25],...
```

```
'HorizontalAlignment','Left');
```

```

hEdit3 = uicontrol(hFig1,'Style','edit',...
'BackgroundColor',[1 1 1],...
'Position',[410 160 150 25],...
'HorizontalAlignment','Left');
hEdit4 = uicontrol(hFig1,'Style','edit',...
'BackgroundColor',[1 1 1],...
'Position',[410 105 150 25],...
'HorizontalAlignment','Left');
hEdit5 = uicontrol(hFig1,'Style','edit',...
'BackgroundColor',[1 1 1],...
'Position',[410 370 150 25],...
'HorizontalAlignment','Left');
hEdit6 = uicontrol(hFig1,'Style','edit',...
'BackgroundColor',[1 1 1],...
'Position',[260 370 150 25],...
'HorizontalAlignment','Left');
hEdit7 = uicontrol(hFig1,'Style','edit',...
'BackgroundColor',[1 1 1],...
'Position',[450 80 100 20],...
'HorizontalAlignment','Left');
hEdit8 = uicontrol(hFig1,'Style','edit',...
'BackgroundColor',[1 1 1],...
'Position',[450 40 100 20],...
'HorizontalAlignment','Left');
hEdit9 = uicontrol(hFig1,'Style','edit',...
'BackgroundColor',[1 1 1],...
'Position',[450 10 100 20],...
'HorizontalAlignment','Left');
%Создание командных кнопок
hButton1=uicontrol(hFig1,'Style','pushbutton',...
'Position', [40 15 100 30],...
'String','Вычислить',...
'FontName','Times New Roman');
hButton2=uicontrol(hFig1,'Style','pushbutton',...
'Position', [150 15 100 30],...
'String','Очистить окно',...
'FontName','Times New Roman');
hButton3=uicontrol(hFig1,'Style','pushbutton',...
'Position', [260 15 100 30],...
'String','Выход',...

```

```

'FontName','Times New Roman');
%Создание текстовых полей
hText1 = uicontrol(hFig1,'Style','text',...
'BackgroundColor',[0.7 0.7 0.7],...
'Position',[55 330 240 20],...
'String','Расчет температурного поля стержня',...
'HorizontalAlignment','Left',...
'FontName','Times New Roman');
hText2 = uicontrol(hFig1,'Style','text',...
'BackgroundColor',[0.7 0.7 0.7],...
'Position',[410 330 150 30],...
'String','Длина стержня,L=',...
'HorizontalAlignment','Left',...
'FontName','Times New Roman');
hText3 = uicontrol(hFig1,'Style','text',...
'BackgroundColor',[0.7 0.7 0.7],...
'Position',[410 260 150 30],...
'String','Теплопроводность,lamda=',...
'HorizontalAlignment','Left',...
'FontName','Times New Roman');
hText4 = uicontrol(hFig1,'Style','text',...
'BackgroundColor',[0.7 0.7 0.7],...
'Position',[410 190 150 30],...
'String','Плотность, rho',...
'HorizontalAlignment','Left',...
'FontName','Times New Roman');
hText5 = uicontrol(hFig1,'Style','text',...
'BackgroundColor',[0.7 0.7 0.7],...
'Position',[410 135 150 20],...
'String','Теплоемкость, c=',...
'HorizontalAlignment','Left',...
'FontName','Times New Roman');
hText6 = uicontrol(hFig1,'Style','text',...
'BackgroundColor',[0.7 0.7 0.7],...
'Position',[410 400 150 20],...
'String','Число узлов, N=',...
'HorizontalAlignment','Left',...
'FontName','Times New Roman');
hText7 = uicontrol(hFig1,'Style','text',...
'BackgroundColor',[0.7 0.7 0.7],...

```



```

'Position',[260 400 150 20],...
'String', 'Конечное время, Tk=',...
'HorizontalAlignment','Left',...
'FontName','Times New Roman');
hText8 = uicontrol(hFig1,'Style','text',...
'BackgroundColor',[0.7 0.7 0.7],...
'Position',[410 80 30 20],...
'String', 'T0=',...
'HorizontalAlignment','Left',...
'FontName','Times New Roman');
hText9 = uicontrol(hFig1,'Style','text',...
'BackgroundColor',[0.7 0.7 0.7],...
'Position',[410 40 30 20],...
'String', 'T1=',...
'HorizontalAlignment','Left',...
'FontName','Times New Roman');
hText10 = uicontrol(hFig1,'Style','text',...
'BackgroundColor',[0.7 0.7 0.7],...
'Position',[410 10 30 20],...
'String', 'TG=',...
'HorizontalAlignment','Left',...
'FontName','Times New Roman');

```

%Создание графического окна для визуализации решения

```

hAxes=axes('Parent',hFig1,'Color',[1 1 1],...
'Units','pixel',...
'Position',[40 70 330 250],...
'FontSize',10);

```

Результат выполнения данной функции представлен на рис. 4.43.

Для установления связи элементов управления с соответствующими исполняемыми m-функциями необходимо связать командные кнопки с callback-функциями.

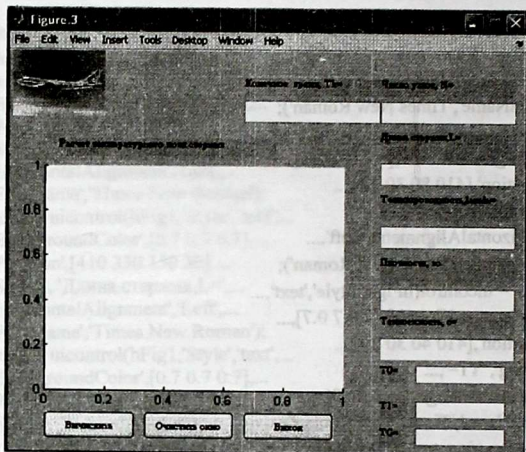


Рис. 4.43. Разработанный графический интерфейс пользователя.

Для осуществления связи командных кнопок с функциями дополняются в листинге строки, в которых создаются управляющие команды:

```
hButton1=uicontrol(hFig1,'Style','pushbutton',...
```

```
'Position', [40 15 100 30],...
```

```
'String','Вычислить',...
```

```
'Callback','MyT',...
```

```
'FontName','Times New Roman');
```

```
hButton2=uicontrol(hFig1,'Style','pushbutton',...
```

```
'Position', [150 15 100 30],...
```

```
'String','Очистить окно',...
```

```
'Callback','MyClear',...
```

```
'FontName','Times New Roman');
```

```
hButton3=uicontrol(hFig1,'Style','pushbutton',...
```

```
'Position', [260 15 100 30],...
```

```
'String','Выход',...
```

```
'Callback','MyClose',...
```

```
'FontName','Times New Roman');
```

Предварительно, создадим m-функции под именами MyClear, MyExit и MyT.

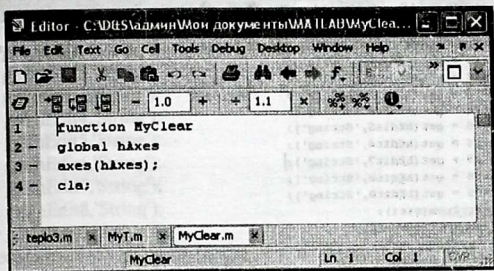


Рис.4.44. Функция MyClear.

В функции MyClear вызов функции cla обеспечивает стирание содержания объекта axes с описателем hAxes, оставляя без изменения объект Fig.

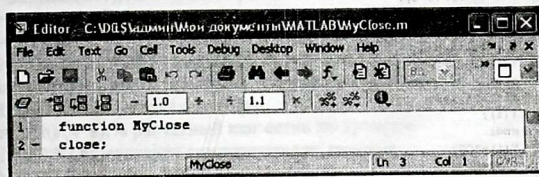


Рис.4.45. Функция MyClose.

Функция MyClose осуществляет выход из приложения(рис.4.45). Функция MyT рассчитывает температурное поле(Рис.4.46).

```

Editor - C:\DBS\ADMIN\Mои документы\МАТ\ABW\y1.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons] Stack:
- 1.0 + 1.1 x [Icons]
1 function MyT
2 global hAxes hEdit1 hEdit2 hEdit3 hEdit4 hEdit5 hEdit6 hEdit7 hEdit8 hEdit9
3 str1 = get(hEdit1,'String');
4 str2 = get(hEdit2,'String');
5 str3 = get(hEdit3,'String');
6 str4 = get(hEdit4,'String');
7 str5 = get(hEdit5,'String');
8 str6 = get(hEdit6,'String');
9 str7 = get(hEdit7,'String');
10 str8 = get(hEdit8,'String');
11 str9 = get(hEdit9,'String');
12 L=str2num(str1);
13 lambda=str2num(str2);
14 ro=str2num(str3);
15 c=str2num(str4);
16 N=str2num(str5);
17 Tk=str2num(str6);
18 TO=str2num(str7);
19 TI=str2num(str8);
20 TG=str2num(str9);
21 a=lambda/(ro*c);
22 h=L/(N-1);
23 tau=(h*h)/(4*a);
24 T(1)=TO;
25 T(N)=TG;
26 for i=2:1:N-1;
27 T(i)=TO;
28 end;
29 for i=1:1:N;
30 T(i);
31 end;
32 T(1)=300;
33 time=0;
34 while time<Tk
35 time=time+tau;
36 for i=1:1:N;
37 TT(i)=T(i);
38 end;
39 for i=2:1:N-1;
40 T(i)=TT(i)+(a*tau)/(h*h)*(TT(i+1)-2.0*TT(i)+TT(i-1)));
41 end;
42 end;
43 axes(hAxes);
44 i=1:1:N;
45 plot(i,T(i));

```

Рис.4.46 Функция MyT.

```

function MyT
global hAxes hEdit1 hEdit2 hEdit3 hEdit4 hEdit5 hEdit6 hEdit7 hEdit8
hEdit9
%Считывание параметров вычислений
str1 = get(hEdit1,'String');
str2 = get(hEdit2,'String');
str3 = get(hEdit3,'String');
str4 = get(hEdit4,'String');
str5 = get(hEdit5,'String');
str6 = get(hEdit6,'String');
str7 = get(hEdit7,'String');
str8 = get(hEdit8,'String');
str9 = get(hEdit9,'String');
%Преобразование имени функции из списка
L=str2num(str1);%Длина стержня
lamda=str2num(str2);%коэффициент теплопроводности
ro=str2num(str3);%Плотность
c=str2num(str4);%Теплоемкость
N=str2num(str5);%Количество узлов
Tk=str2num(str6);%Конечное время
T0=str2num(str7);%Начальная температура
T1=str2num(str8);%Температура на границе
TG=str2num(str9);%Температура на границе x=L
a=lamda/(ro*c);% Коэффициент температуропроводности
h=L/(N-1);%Расчетный шаг сетки
tau=(h*h)/(4*a);% расчетный шаг сетки по времени
T(1)=T0;%Определение температуры на границе
T(N)=TG;
for i=2:1:N-1;%Определение T в начальный момент времени
T(i)=T0;
end;
for i=1:1:N;
T(i);
end;
T(1)=300;
time=0;
while time<Tk %Использование цикла с предусловием
time=time+tau;%Увеличение переменной времени на шаг
for i=1:1:N;
TT(i)=T(i);% Запоминание поля T на предыдущем слое по времени

```

```

end;
for i=2:1:N-1;% Определение неизвестного поля T
T(i)=T(i)+(a*tau)/(h*h)*(T(i+1)-2.0*T(i)+T(i-1)));
end;
end;
%Построение графика
axes(hAxes);
i=1:1:N;
plot(i,T(i));

```

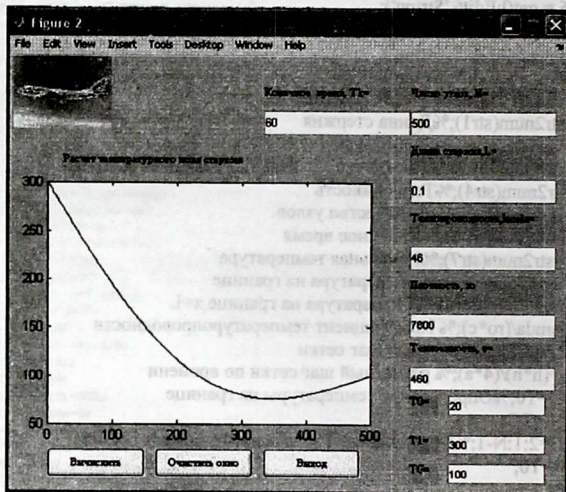


Рис. 4.47. Состояние GUI после нажатия кнопки Вычислить.

Для запуска программы необходимо в командном окне набрать название m-функции `terp3`, при этом на экране появляется графический интерфейс, который представлен на рис.. Заполняем необходимыми данными поля и запускаем программу нажатием на кнопку **Вычислить**. Результат расчета представляется в поле слева как показано на рис.4.47.

4.4.4. Визуальное программирование интерфейса пользователя

Постановка задачи. Рассмотрим разработку графического интерфейса для расчета распределения температуры при нагреве тела лазерным излучением, плотность которого изменяется по закону Бугера-Ламберта:

$$q(z) = q_0(1 - R) \exp\left(-\int_0^z \alpha(z) dz\right)$$

После загрузки среды МАТЛАБ (Рис.4.48), необходимо войти в режим графического интерфейса как показано на рис. 4.49-4.50.

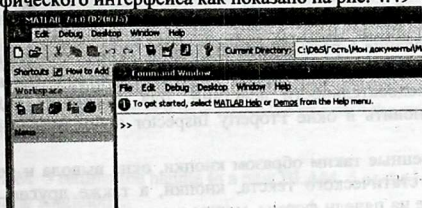


Рис.4.48.

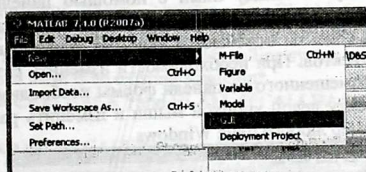


Рис.4.49.

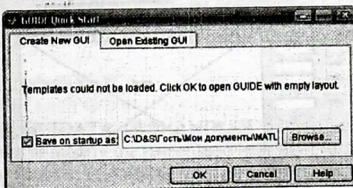


Рис.4.50.

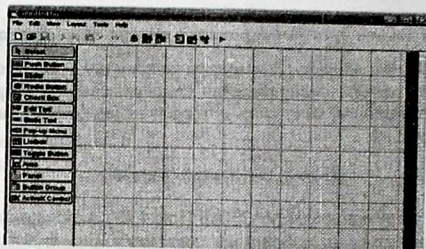


Рис.4.51. Форма для визуального создания GUI

Для создания и размещения кнопок на панели формы используется кнопка **Push Button**, которая переносится повторением вышеописанной последовательности действий. Для изменения надписи на кнопке установить в окне Property Inspector новое значение в поле String.

Построенные таким образом кнопки, окна вывода и редактирования, окна статического текста, кнопки, а также другие объекты, размещенные на панели формы, можно выравнивать и установить определенные промежутки между ними с помощью панели Alignment Tools. Для включения данной панели используется специальная кнопка. Выделенные объекты отмечаются черными точками вокруг соответствующих объектов. При необходимости изменить размер, какого либо объекта, размещенного на панели формы необходимо щелкнуть по данному объекту левой кнопкой мыши и изменить размер, также как меняется размер любого окна Windows.

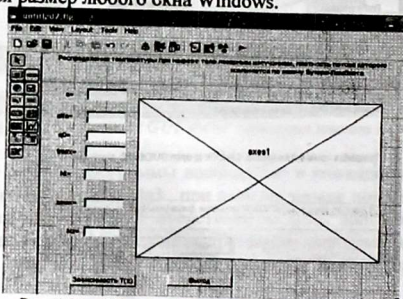


Рис.4.52. Общий вид разрабатываемого GUI

После разработки внешнего вида графического интерфейса необходимо сохранить этот файл на диске, вызвав стандартное окно Windows для сохранения файла: File→Save. После сохранения на диске появляются два файла: NAME.m и Name.fig (где NAME выбранное имя файла).

Первый файл – это текст программы, реализующий разработанный интерфейс, второй – набор данных, необходимых для работы интерфейса. Для запуска программы на выполнение достаточно в командной строке МАТЛАБ ввести имя файла.

Проект графического интерфейса решения задачи, рассмотренной в разделе 3.1, представлен на рис. 4.53. Ниже приведен соответствующий программный код, сохраненный на диске.

```
function varargout = Blam_5(varargin)
% BLAM_5 M-file for Blam_5.fig
% BLAM_5, by itself, creates a new BLAM_5 or raises the existing
% singleton*.
%
% H = BLAM_5 returns the handle to a new BLAM_5 or the handle to
% the existing singleton*.
%
% BLAM_5('Property','Value',...) creates a new BLAM_5 using the
% given property value pairs. Unrecognized properties are passed via
% varargin to Blam_5_OpeningFcn. This calling syntax produces a
% warning when there is an existing singleton*.
%% BLAM_5('CALLBACK') and BLAM_5('CALLBACK',hObject,...)
call the
% local function named CALLBACK in BLAM_5.M with the given in-
put
% arguments.
%
% *See GUI Options on GUIDE's Tools menu. Choose "GUI allows
only one
% instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES
% Edit the above text to modify the response to help Blam_5
% Last Modified by GUIDE v2.5 18-Apr-2013 16:39:47
% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name', mfilename, ...
```

```

'gui_Singleton', gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @Blam_5_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn', @Blam_5_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn', [], ...
'gui_Callback', [];
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end
if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT
% --- Executes just before Blam_5 is made visible.
function Blam_5_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
% This function has no output args, see OutputFcn.
% hObject handle to figure
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% varargin unrecognized PropertyName/PropertyValue pairs from the
% command line (see VARARGIN)
% Choose default command line output for Blam_5
handles.output = hObject;
% Update handles structure
guidata(hObject, handles);
% UIWAIT makes Blam_5 wait for user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);
% --- Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = Blam_5_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
% varargout cell array for returning output args (see VARARGOUT);
% hObject handle to figure
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;
function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

```

```

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit1 as text
%   str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit1 as a
double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject   handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles   empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%   See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject   handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles   structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit2 as text
%   str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit2 as a
double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject   handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles   empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%   See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject   handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles   structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit3 as text
%   str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit3 as a
double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.

```

```

function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit4_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit4 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit4 as a double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit5_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit5 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit5 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit5 as a
double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit5_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit5 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.

```

```

% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit6_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit6 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit6 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit6 as a
double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit6_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit6 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit7_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit7 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit7 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit7 as a
double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit7_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit7 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');

```

```

end
% --- Executes on button press in pushbutton1.
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to pushbutton1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
global a alfa q0 tmax Nt zmax Nz
read_data(handles);
z = 0:zmax/Nz:zmax;
T = q0/a*0.0001*exp(-alfa*z);
plot(T,z);
% --- Executes on button press in pushbutton2.
function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to pushbutton2 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
close;
function read_data(handles)
global a alfa q0 tmax Nt zmax Nz
a = str2double(get(handles.edit1,'String'));
alfa = str2double(get(handles.edit2,'String'));
q0 = str2double(get(handles.edit3,'String'));
tmax = str2double(get(handles.edit4,'String'));
Nt = str2double(get(handles.edit5,'String'));
zmax = str2double(get(handles.edit6,'String'));
Nz = str2double(get(handles.edit7,'String'));

```

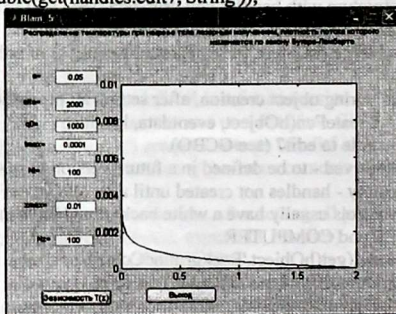


Рис. 4.53. Графический интерфейс задачи.

Контрольные вопросы к главе 4

1. Для каких целей предназначена система МАТЛАБ?
2. В чем заключаются преимущества системы МАТЛАБ?
3. Как вызывается приложение PDE Toolbox?
4. Возможности приложения PDE Toolbox.
5. Операторы ветвления и цикла МАТЛАБ.
6. Что представляет собой сценарий работы?
7. Как в МАТЛАБ осуществляется анимация?
8. Какая процедура называется векторизацией кода?
9. Что представляет собой M-файл и в чем заключается его назначение?
10. Что называется интерфейсом пользователя?
11. Назовите основные типы управляющих элементов интерфейса пользователя?
12. Назовите основные технологии создания GUI.
13. Как создаются элементы управления при создании GUI с использованием технологии программирования интерфейса?
14. Как создать GUI при использовании технологии визуального проектирования?
15. Что такое обработчик событий?
16. Как устанавливаются значения основных полей объектов управления?

Контрольные задания к главе 4.

Задание 1.

Вычислить частичную сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ используя операторы цикла МАТЛАБ.

Задание 2.

Создать анимационный клип равномерного движения по прямой линии, окружности материального тела в виде точки.

Задание 3.

Используя разработанный интерфейс GUI задачи определения температурного поля стержня рассчитать распределение температур для следующих значений параметров:

№	Название		Значения параметров		
1	Tk	Конечное время	60	60	100
2	L	Длина стержня	0,1	0,1	0,1
3	N	Число узлов	500	400	500

4	lam da	Коэффициент теплопроводности	46	46	46
5	ro	Плотность вещества стержня	7800	7800	7800
6	To	Начальная температура	20	20	20
7	T1	Температура соответствующая моменту времени $t=0$	200	400	400
8	TG	Температура на конце стержня	50	50	70

Задание 4.

Используя разработанный интерфейс для расчета температуры тела при лазерном нагреве рассчитать распределение температур для следующих значений параметров:

№	Название		Значения параметров		
1	a		60	60	100
2	alfa	Коэффициент поглощения	0,1	0,1	0,1
3	q0	Плотность потока при $t=0$	500	400	500
4	tmax	Максимальное время	46	46	46
5	Nt	Число шагов по времени	7800	7800	7800
6	zmax	Максимальная координата	20	20	20
7	Nz	Число шагов по z	200	400	400

4.4.5. Визуальное программирование интерфейса пользователя

Главным средством и визуально-ориентированном проектировании GUI является приложение GUIDE(GUI Designer). При работе с инструментом GUIDE можно создавать окна GUI путем выбора мышью нужных элементов управления и перемещения их в окно GUI. Таким образом, могут создаваться различные элементы интерфейса, например кнопки, раскрывающиеся списки, линейки прокрутки и т.д. При этом возможно программирование событий, которые возникают при обращении пользователя к заданным элементам управления. Визуальное программирование совмещается с объектно-ориентированным, в частности в первом широко используется свойство наследования признаков родительских объектов их потомками.

Приложение с GUI может состоять из одного окна(основного) или нескольких окон и осуществлять вывод графической и текстовой информации как в основное окно приложения, так и в отдельные окна. MATLAB имеет ряд функций создания стандартных диалоговых окон для открытия и сохранения файлов, печати, выбора шрифта для текстовых объектов, создания окон для ввода данных и др. Эти средства(объекты) можно использовать в приложениях пользователя.

Для открытия окна инструмента GUIDE надо использовать команду

>> guide

При этом инструмент запускается и появляется диалоговое окно GUIDE:

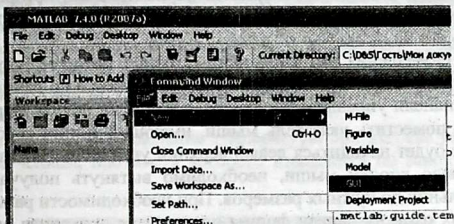


Рис.2.2.3

По истечению некоторого времени, на экране появиться окно, представленное на рис. 2.2.4 и 2.2.5.

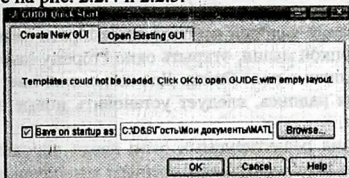


Рис. 2.2.4

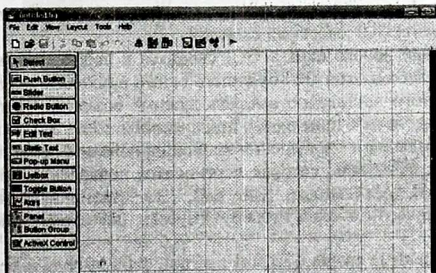





Рис.2.2.5. Окно нового приложения GUI.


По окончании инициализации появляется основное окно среды GUIDE, содержащее поле окна приложения, вертикальную панель инструментов для добавления элементов интерфейса, горизонтальную панель инструментов и обычное меню (Рис.2.2.5.). С назначением кнопок панелей можно ознакомиться по подсказкам, которые появляются, если установить курсор мыши на нужную кнопку панели и задержать его на несколько секунд.

Для размещения на панели формы окна, в котором будут выводиться графики используется кнопка . Щелкнув по данному элементу на панели управления и переводя мышшь на панель формы, необходимо поместить указатель мыши, имеющий форму креста, в ту точку, где будет находиться левый верхний угол окна. Нажав и удерживая левую кнопку мыши, необходимо вытянуть получающийся прямоугольник до нужных размеров. При необходимости размещения нескольких окон на панели формы повторяется описанная выше последовательность действий.

Надписи на панели формы создаются с помощью кнопки , которая переносится повторением описанной выше последовательности действий. После этого на панели формы появится надпись Static Text. Для изменения надписи необходимо выбрать надпись, щелкнув по ней левой кнопкой мыши, открыть окно Property Inspector, и ввести новый текст надписи в поле String. Для изменения цвета фона, на котором выводится надпись, следует установить новые значения поля BackgroundColor.

Для создания редактируемых окон ввода используется кнопка  Edit Text, которая переносится повторением вышеописанной последовательности действий. Для изменения значения окна установить в окне Property Inspector новое значение в поле String. Каждый объект(компонент) GUI имеет ряд свойств.

Создание нового окна с GUI сводится к переносу объектов из панели объектов в окно GUI будущего окна с приложением пользователя. Для этого достаточно выбрать нужные объекты и с помощью мыши перенести их в поле окна с приложением пользователя.

Для создания и размещения кнопок на панели формы используется кнопка  Push Button, которая переносится повторением вышеописанной последовательности действий. Для изменения надписи на кнопке установить в окне Property Inspector новое значение в поле String.

Построенные таким образом кнопки, окна вывода и редактирования, окна статического текста, кнопки, а также другие объекты,

размещенные на панели формы, можно выровнять и установить определенные промежутки между ними с помощью панели Alignment Tools. Для включения данной панели используется специальная кнопка. Выделенные объекты отмечаются черными точками вокруг соответствующих объектов. При необходимости изменить размер, какого либо объекта, размещенного на панели формы необходимо щелкнуть по данному объекту левой кнопкой мыши и изменить размер, также как меняется размер любого окна Windows. На примере расчета распределения температуры тела при лазерном нагреве рассмотрим данный способ создания интерфейса пользователя.

Задача.5.2. Распределение температуры при нагреве тела лазерным излучением, плотность которого изменяется по закону Бугера-Ламберта.

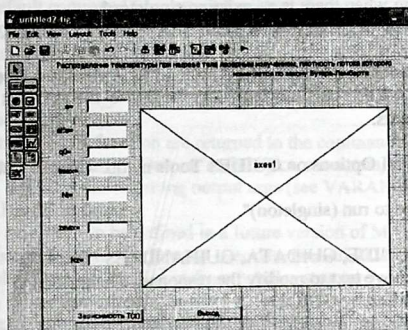


Рис.3.2.5

После разработки внешнего вида графического интерфейса необходимо сохранить этот файл на диске, вызвав стандартное окно Windows для сохранения файла: File→Save. После сохранения на диске появляются два файла: NAME.m и Name.fig (где NAME выбранное имя файла).

Первый файл – это текст программы, реализующий разработанный интерфейс, второй – набор данных, необходимых для работы интерфейса. Для запуска программы на выполнение достаточно в командной строке МАТЛАБ ввести имя файла.

Проект графического интерфейса решения задачи, рассмотренной в разделе 3.1, представлен на рис. 3.2.6. Ниже приведен соответствующий программный код, сохраненный на диске.

```
function varargout = Blam_5(varargin)
%BLAM_5 M-file for Blam_5.fig
%   BLAM_5, by itself, creates a new BLAM_5 or raises the existing
%   singleton*.
%
%   H = BLAM_5 returns the handle to a new BLAM_5 or the handle to
%   the existing singleton*.
%
%   BLAM_5('Property','Value',...) creates a new BLAM_5 using the
%   given property value pairs. Unrecognized properties are passed via
%   varargin to Blam_5_OpeningFcn. This calling syntax produces a
%   warning when there is an existing singleton*.
%%   BLAM_5('CALLBACK') and BLAM_5('CALLBACK', hObject,...)
call the
%   local function named CALLBACK in BLAM_5.M with the given in-
put
%   arguments.
%
%   *See GUI Options on GUIDE's Tools menu. Choose "GUI allows
only one
%   instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES
% Edit the above text to modify the response to help Blam_5
% Last Modified by GUIDE v2.5 18-Apr-2013 16:39:47
% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',    mfilename, ...
    'gui_Singleton', gui_Singleton, ...
    'gui_OpeningFcn', @Blam_5_OpeningFcn, ...
    'gui_OutputFcn', @Blam_5_OutputFcn, ...
    'gui_LayoutFcn', [], ...
    'gui_Callback', []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end
if nargout
```

```

[varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT
% --- Executes just before Blam_5 is made visible.
function Blam_5_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
% This function has no output args, see OutputFcn.
% hObject handle to figure
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% varargin unrecognized PropertyName/PropertyValue pairs from the
% command line (see VARARGIN)
% Choose default command line output for Blam_5
handles.output = hObject;
% Update handles structure
guidata(hObject, handles);
% UIWAIT makes Blam_5 wait for user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);
% --- Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = Blam_5_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
% varargout cell array for returning output args (see VARARGOUT);
% hObject handle to figure
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;
function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit1 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit1 as a
double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.

```

```

% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit2 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit2 as a
double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit3 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit3 as a
double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');

```

```

end
function edit4_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit4 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit4 as a double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit5_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit5 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit5 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit5 as a
double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit5_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit5 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit6_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit6 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

```

```

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit6 as text
%   str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit6 as a
double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit6_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject   handle to edit6 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles   empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%   See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit7_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject   handle to edit7 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles   structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit7 as text
%   str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit7 as a
double
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit7_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject   handle to edit7 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles   empty - handles not created until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%   See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
% --- Executes on button press in pushbutton1.
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject   handle to pushbutton1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles   structure with handles and user data (see GUIDATA)
global a alfa q0 tmax Nt zmax Nz
read_data(handles);
z = 0:zmax/Nz:zmax;

```



```

T = q0/a*0.0001*exp(-alfa*z);
plot(T,z);
% --- Executes on button press in pushbutton2.
function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to pushbutton2 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
close;
function read_data(handles)
global a alfa q0 tmax Nt zmax Nz
a = str2double(get(handles.edit1,'String'));
alfa = str2double(get(handles.edit2,'String'));
q0 = str2double(get(handles.edit3,'String'));
tmax = str2double(get(handles.edit4,'String'));
Nt = str2double(get(handles.edit5,'String'));
zmax = str2double(get(handles.edit6,'String'));
Nz = str2double(get(handles.edit7,'String'));

```

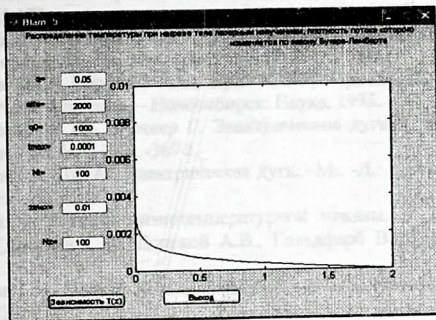
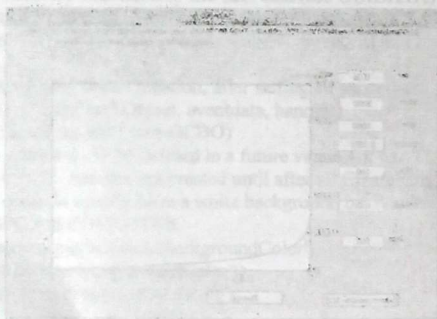


Рис. 3.2.6.

Задания для самостоятельного выполнения

Рассчитать распределение температур для следующих значений параметров:

№	Название		Значения параметров		
1	a	Коэффициент температуропроводности	60	60	100
2	alfa	Коэффициент поглощения	0,1	0,1	0,1
3	q0	Начальная плотность потока	500	400	500
4	tmax	Максимальное время	46	46	46
5	Nt	Число шагов по t	7800	7800	7800
6	zmax	Максимальное значение	20	20	20
7	Nz	Число шагов по z	200	400	400



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.П.Исаченко, В.А. Осипова, Ф.С. Сукомел. Теплопередача. Учебник для вузов.: М.- Л.: Изд -во «Энергия», 1965. - 424 с.
2. Теория тепломассообмена.//С.И.Исаев, И.А.Кожин, В.И.Кофанов и др. Под ред. А.И.Леонтьева.-М.: Высш.школа, 1979.- 405 с.
3. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. 5-издание.- М.: Атомиздат, 1979, 416 с.
4. Юдаев Б.Н. Техническая термодинамика. Теплопередача: -М.: Высш.шк., 1988.- 479 с.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600с.
6. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел М.:Наука, 1964, 487
7. Никитенко Н.И. Теория тепломассопереноса. -Киев: Наукова думка, 1983. - 352 с.
8. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Анищенко Л.М. Высокотемпературные технологические процессы:Теплофизические основы.- М.: Наука, 1985, 172 с.
9. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. Научное издание-3-е изд. - Долгопрудный: Изд. дом. «Интеллект», 2009.- 736 с.
10. Жуков М.Ф., Коротеев А.С., Урюков Б.А. Прикладная динамика термической плазмы. - Новосибирск: Наука, 1975. - 293.
11. Финкельбург В., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма. - М. ИЛ, 1961.-369 с.
12. Самервилл Дж. М. Электрическая дуга. -М.: -Л.: Госэнергоиздат, 1962 г. - 120 с.
13. Физика и техника низкотемпературной плазмы. М., Атомиздат, 1972. (Дресвин С.В., Донской А.В., Гольдфарб В.М., Клубникин В.С.), 352 с
14. Лесков Г.И., Электрическая сварочная дуга. М., Машиностроение, 1970, 335с.
15. Жеенбаев Ж., Энгельшт В.С. Ламинарный плазмотрон.-Фрунзе: Илим, 1975. -82 с.
16. Шоек П.А. Исследование баланса энергии на аноде сильнотоочных дуг, горящих в атмосфере аргона //Современные проблемы теплообмена. - М.: Энергия, 1966. -с. 110 - 139.
17. Математическое моделирование электрической дуги /Под ред. В.С. Энгельшта. -Фрунзе:, Илим, 1983. - 363с.9

18. Теория термической электродуговой плазмы. Ч.1. Методы математического исследования плазмы / Жуков М.Ф., Урюков Б.А., Энгельшт В.С., Лелевкин В.М. и др.-Новосибирск: Наука, 1987, 287с.
19. Электрическая дуга – генератор низкотемпературной плазмы /Жайнаков А.Ж., Лелевкин В.М., Мечев В.С. и др.-Бишкек, 1991, 373 с.
20. Теория сварочных процессов: Учебник для вузов по спец. «Оборуд. и техн. свароч. пр-ва»/В.Н.Волчек, В.М. Ямпольский, В.А. Винокуров и др.; Под ред.В.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1988. 559с.
21. М.М. Крутянский и др. применение плазменного нагрева. М.-Л., «Энергия». 1964.
22. H.W. Emmons, R.J.Land. Phys. fluids, 5, 1489, 1962.
23. H.J.Patt, G. Schmitz, Z. Physik, 185, 1 1965.
24. H. E. Weber. Proc. 1964 Heat Transfer and Fluid Mechanics Inst., June, 1964.
25. H.A. Stine, V.R. Watson. NASA Techn. Note, D-1331. Washington, 1962.
26. J.G. Skifstad, S.N.B. Murthy. IEEE Trans. nucl. Sci., NS-11, 92, 1964.
27. H.J. Patt, G. Schmitz. Z. Physik, 188, 1, 1965; 195, 419, 1966
28. В.Н. Ветлущий, В.Г. Севастьянсен – к о. ПИМТФ, №5, 82, 1968, № 1, 136, 1969.
29. Koller. Z. Naturforsch., 21a, 505, 1966.
30. В. Ahlborn. Z. Naturforsch., 20a, 466, 1965.
31. Ж. Жеенбаев, Ф.Г. Карих, Р.И. Конавко, В.С. Энгельшт. Изв. СО-АН СССР, серия технических наук, №3, вып.1, 70, 1967.
32. А.д. Лебедев, Б.А. Урюков. Сб. «Генераторы низкотемпературной плазмы». М., 1969.
33. Г.Ю. Даутов. Сб. «Генераторы низкотемпературной плазмы». М., 1969.
34. А.П. Быркин, И.И. Межиров. О расчете течения вязкого газа в канале. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967. №6, стр. 156-168.
35. G. Schmitz, H.J. Patt, J. Unlenbusch. Z. Physik, 173, 552, 1963.
36. J. Bues, h.J. Patt, J. Richter. Z. Angew. Physik, 22, #4, 345, 1967.
37. Л.М. Симуни. ЖВМ И МФ., 5, №6, 1138, 1965.
38. И. Кимура, А. Канзава. Ракетная техника и космонавтика. №3, 120, 1965.
39. Г. И. Марчук. Методы расчета ядерных реакторов. Госатомиздат, 1961.
40. K.S.Drellishak. Phys. Fluids, 6, #9, 1280, 1963.

41. E. Baum, G. Cann, Thermodynamic properties of argon, Electro-Optical Systems, INC, Pasadena, Calif., 1963.
42. А. Н. Гордов. Основы пирометрии, «Металлургия» 1964.
43. K. Vockasten. J. Opt. Soc. Amer., 51, 943, 1961.
44. Л.М. Биберман, Г. Э. Норманн, успехи физических наук, 91, №2, 193, 1967.
45. В. Ц. Гурович, А.Жайнаков, В.С. Энгельшт. «Расчетная модель плазматрона». Сб. «Исследование электрической дуги и плазматрона», Фрунзе, стр. 3-10, 1968
46. А. Жайнаков, Ж. Жеенбаев, В.С. Энгельшт. «Расчет плазматрона с учетом магнитного поля электрической дуги». Тезисы IV Всесоюзной конференции по физике и генератором низкотемпературной плазмы, Алма-Ата, 1970.
47. Жайнаков А.Ж., Кабаева Г.Д., Якиманская Т.Т. Информатика. Краткий курс. Учебное пособие. 201 с., 2002.
48. Самарский А.А., Гулия Ю.А. Численные методы. – М.:1989. – 432 с.
49. Д.А.Гуденко, Д.В.Петрученко. Сборник задач по программированию. – СПб.: Питер, 2003. 475
50. Лазерная и электроручевая обработка материалов: Справ-к / Под ред. Н. Н. Рыкалина и др. М.: Машиностроение, 1985. 496 с.
51. О.Звелто. Принципы лазеров. Москва.Мир, 1984 г. с.
52. Рыкалин А.Н., Углов А.А. Развитие теплофизических основ технологических процессов.// Физика и химия обработки материалов., 1981, №1, с.7-46.
53. Любов Б.Я, Соболев Э.Н. Развитие тепловой модели поверхностного испарения металлов под действием концентрированных потоков энергии.// Физика и химия обработки материалов., 1979, №1, с12-26.
54. Любов Б.Я., Соболев Э.Н. Квазистационарное развитие в испаряющемся под действием лазерного излучения материале.// Журнал технической физики, 1976, т.46, №7, с.1517-
55. Минько Л.П., Лопарев А.Н., Насогов В.И., Ковалев А.М. Воздействие квазистационарных миллисекундных импульсов излучения неодимового лазера на металлы.// Квантовая электроника, 1985, №6, с.21-3012. Вейко В.П., Либенсон М.Н. Лазерная обработка. Лениздат, 1973, 350 с.
56. Бонч Бруевич а.И., Имас Я.А. Действие излучения ОКГ на металлы.//Физика и химия обработки материалов, 1967, №5, с.8-12.

57. Баранов М.С., Вершок Б.А., Гейнрич И.Н. Влияние интенсивности лазерного излучения на механизм углубления кратера в металлах. // Физика и химия обработки материалов, 1976, №4, с.8-12.
58. Бертяев Б. И., Завестовская И. Н., Игошин В. И., Катулин В. А., Шишковский И. В. Физические основы моделирования и оптимизации процесса лазерной поверхностной закалки сталей. Труды ФИАН - М.: Наука. - 1989. - Т.198, С. 5-23.
59. Шишковский И. В., Завестовская И. Н., В. И. Игошин. Теоретическое и численное исследование напряжений при лазерной закалке сталей Труды ФИРАН. - Т.217 - М. - 1993, С. 13-36.
60. Веденов А. А., Гладуш Г. Г. Физические процессы при лазерной обработке материалов. М.; Энергоатомиздат, 1985. - 208 с.
61. Григорьянц А. Г. Основы лазерной обработки материалов. М.: «Машиностроение», 1989. - 301 с.
62. Таблицы физических величин: Справочник / Под ред. И. К. Кикина М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
63. Свойства элементов: В 2 ч. Ч. 1. Физические свойства: Справочник/ Под ред. Г. В. Самсонова. М.: Металлургия, 1976. 600 с.
64. Вейко В.П., Либенсон М.Н. Лазерная обработка. Лениздат, 1973, 350 с.
65. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Кокора А.Н. Лазерная обработка материалов. - М.: Машиностроение, 1975.-296 с.
66. Рэди Дж. Действие мощного лазерного излучения. - М.: Мир, 1974. - 450 с.
67. Рэди Дж. Промышленное применение лазеров. - М.: МИР, 1981.- 630 с.
68. Вейко В.П. Лазерная обработка пленочных элементов.- Л.:Машиностроение,1986.- 248 с.
69. Любов Б.Я., Соболев Э.Н. Развитие тепловой модели поверхностного испарения металлов под действием концентрированных потоков энергии.//Физика и химия обработки материалов., 1979, №1. С.12-26.
70. Чокоев Э.С. Квазистационарная задача процесса углубления каверны с переменной скоростью. //Изв.АН Кирг.ССР, сер. Физ.-техн. и мат. Наук, 1987, №2, с.86-87.
71. Водоватов Ф.Ф., Лукьянов В.Б., Соболев Э.Н. Использование лазера для резки неметаллических материалов - В кн. Использование оптических квантовых генераторов в современной науке и технике.Л.: ЛДНТП, 1973, 33 с.

72. Веденов А.А., Гладуш Г.Г. Физические процессы при лазерной обработке материалов.- М.: Энергоатомиздат, 1985.-208 с.
73. Григорьянц А.Г., Шиганов И.Н., Мирюсов А.И. «Технологические процессы лазерной обработки». М.: МГТУ им. Баумана, 2006.
74. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов: Справочник/ Н.Н. Рыкалин, А.А. Углов, И.В. Зуев и др.-М.: Машиностроение, 1985.-496с.
75. Вейко В.П. «Технологические лазеры и лазерное излучение». –М.: СПбГУ ИТМО, 2006.-52с.
76. Саенко А. ТЕХТРАН: современное средство оптимизации раскрытия листового материала // Оборудование и инструмент для профессионалов (сер. «Металлообработка»). 2008. № 6. С. 66-67.
78. Левский М. В. Оптимизация траектории движения рабочего инструмента при лазерной резке листовых материалов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2005. № 7. С. 26-31.
79. Мухачева Э. А., Панюкова Т. А. Проблема рационального использования промышленных материалов: оптимизация обратного хода раскрытия // Обратные задачи в приложениях: Сб. ст. Бирск: Изд-во БирГСПА, 2008. С. 270-277.
80. Смородин, Ф.К. Лазерная резка конструкционных материалов большой толщины / Ф.К. Смородин, А.М. Тощев, В.А. Точилкин // Авиационная промышленность. 1991. №5. С. 29-31.
81. Овчинников В. Справочник сварщика. Изд. КноРус, 2013г. – 272 с.
82. Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М. MATLAB 7: программирование, численные методы. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 752 с : ил.
83. Потемкин В.Г. Вычисления в среде MATLAB. – М.: Диалог-МИФИ, 2004. –720 с.
84. Поршнева С.В. MATLAB 7: основы работы и программирования : учебное пособие для вузов / С. В. Поршнева. — М. : Бином, 2006 — 320 с.
85. Смоленцев Н.К. MATLAB: программирование на Visual C#, Borland JBuilder, VBA: Учебный курс – М.: ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2009. -464с.
86. Дьяконов В. П. MATLAB 7.* / R2006/2007. Самоучитель. — Москва.: «ДМК-Пресс», 2008. — С. 768.
87. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. MATLAB 7. Самоучитель. — Пресс, 2005. — С. 464.
88. Половко А. М., Бутусов П. Н. MATLAB для студента. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. —320 с.

89. Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x : В 2 т.Т.1 / В. Г. Потемкин. — 1999. — 366 с.
90. Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x : В 2 т.Т.2 / В. Г. Потемкин. — 1999. — 304 с.
91. Гультяев, А. Визуальное моделирование в среде MATLAB : Учебный курс / А. Гультяев. — СПб. : Питер, 2000. — 432 с. : ил. — (Учебный курс).
92. Мэтьюз, Джон. Численные методы; Использование MATLAB : пер. с англ. / Д. Г. Мэтьюз, К. Д. Финк ; Под ред. Ю. В. Козаченко. — 3-е изд. — М. : Вильямс, 2001. — 720 с.
93. Чен К., Джиблин П., Ирвинг А. MATLAB в математических исследованиях : пер. с англ. — М. : Мир, 2001. — 346 с.
94. Дьяконов В. Matlab 6 : Учебный курс / В. Дьяконов. — СПб. : Питер, 2001. — 592 с.

Подписано в печать 24.05.2016г.

Формат 60x84 1/16. Объем 18,25 п.л. уч.-издл.

Печать офсетная.

Тираж 300 экз. Заказ №27

Отпечатано в типографии Ч.П. «Аязбеков Алмазбек»

г. Бишкек пр.Чуй 215.

тел.:(+996554) 74-74-67.

